

TD de MTH101 N° 1: *Espaces vectoriels et applications linéaires*

1. Soit $E = \mathbb{R}^2$, montrer que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et que F_1 et F_2 sont deux sev de E supplémentaires dans E où F_1 (resp. F_2) est l'ensemble des applications paires (resp. impaires) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\forall f, g \in E$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha.f)(x) = \alpha f(x)$.
3. On considère le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}^n$ et pour tout $n \geq 2$ on pose $x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On considère les sous-ensembles suivants: $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 = 0\}$, $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 = 1\}$, $E_3 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 = x_2\}$, $E_4 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 x_2 = 0\}$, $E_5 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 = x_2 = 0\}$, $E_6 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$ et $E_7 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 + x_2 = 1\}$. Pour tout $i = 1, \dots, 7$, E_i est-il un sous-espace de $\mathbb{R}^n$? Dans l'affirmative, donner en une base et sa dimension.
4. Etudier chacun des systèmes, $S = (u, v, w)$, suivants et déterminer leur rang (en fonction du paramètre α s'il y a lieu):
i. $u = {}^t(5, -3, 1)$, $v = {}^t(1, -2, 1)$ et $w = {}^t(3, 1, -3)$
ii. $u = {}^t(\alpha, 1, 1)$, $v = {}^t(1, \alpha, 1)$ et $w = {}^t(1, 1, \alpha)$.
5. Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } x + iy - z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{C}^3$, et en déterminer une base et la dimension.
6. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{R}$. Soit $G = \{{}^t(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + 2y - z = t\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une base de G et donner sa dimension. Soient $s = {}^t(1, 0, 1, 0)$, $u = {}^t(0, 1, 0, 2)$, $v = {}^t(1, 1, 1, 2)$ et $w = {}^t(3, 1, 3, 2) \in \mathbb{R}^4$. Montrer que le système (s, u, v, w) est lié. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (s, u, v, w) . Donner une base de F . Comparer F et G .
7. Montrer que les applications suivantes sont linéaires :
(a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, définie par $f(x, y, z) = (2x - y, x + y - z)$
(b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, définie par $f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$
8. Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ une application linéaire donnée par $f(x, y, z, t) = (x + z, x + t, y + z, y + t)$
(a) Trouver une base de l'image de f et le rang de f .
(b) Trouver une base du noyau de f et sa dimension.
(c) Montrer que f n'est pas un isomorphisme.
9. Soient E un espace vectoriel sur le corps commutatif $\mathbb{K}$, de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
(a) Montrer que $F + G = \{x + y / x \in F \text{ et } y \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.
(b) Soit $f : F \times G \rightarrow E$ par $f(x, y) = x + y$. Montrer que f est linéaire et trouver $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$. En utilisant la relation $\dim_{\mathbb{K}}(F \times G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$, retrouver le résultat $\dim_{\mathbb{K}}(F + G) + \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$.
10. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.
Montrer que pour tout endomorphisme f de E , on a:
 $(\text{Im } f = \text{Im } f^2) \Leftrightarrow (E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f)$.

11. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?
- (a) $W_1 = \{(a, b, 0); a, b \in \mathbb{R}\}$ ☐
 - (b) $W_2 = \{(a, b, c); a \geq 0, b, c \in \mathbb{R}\}$ ☐
 - (c) $W_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a + b + c = 0\}$ ☐
 - (d) $W_4 = \{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3\}$. ☐
12. Les affirmations suivantes sont-elles correctes?
- (a) Le vecteur $u = (2, -5, 3) \in \mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1, -3, 2)$, $v_2 = (2, -4, -1)$ et $v_3 = (1, -5, 7)$. ☐
 - (b) Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de vecteurs $e_1 = (1, 2, 3)$, $e_2 = (0, 1, 2)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. ☐
 - (c) Le plan $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$ est engendré par $v = (2, 3, 0)$ et $w = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, 0\right)$. ☐
13. Soit E un espace vectoriel de dimension 7 et soient V et W deux sous-espaces vectoriels de dimensions respectives 4 et 5. Est-il possible que $V \cap W$ soit de dimension
- 1? 2? 3? 4? 5?
14. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, indiquer la famille de vecteurs qui constituent une base.
- (a) $x_1 = (1, 2, -1)$, $x_2 = (-2, 1, 1)$, $x_3 = (1, -1, 2)$ ☐
 - (b) $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (2, -1, 1)$, $x_3 = (1, 0, 1)$ $x_4 = (0, 1, 1)$ ☐
 - (c) $x_1 = (1, -1, 0)$, $x_2 = (1, 0, 1)$, $x_3 = (1, 2, 3)$ ☐
15. Indiquer la valeur de $t \in \mathbb{R}$ pour laquelle les vecteurs $(1, 0, t)$, $(1, 1, t)$ et $(t, 0, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
- $A : t = -1$ $B : t = 1$ $C : t = 0$
16. Parmi les application suivantes, dire laquelle est linéaire
- $A : f(x, y) = (x + 1, y + 1)$ $B : g(x, y) = (3x - y, 0)$ $C : h(x, y, z) = (x, xyz, z)$
17. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Soit f l'endomorphisme de E , $(x, y, z) \mapsto (x + 3z, 0, y - 2z)$. Dire laquelle des propositions suivantes est vraie.
- $A : f(e_1) = e_1 + 3e_3, f(e_2) = 0, f(e_3) = e_2 - 2e_3$
 $B : f(e_1) = e_1, f(e_2) = e_3, f(e_3) = 3e_1 - 2e_3$
 $C : \text{Ker } f = \{0\}$
18. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (2x + y, x - y, x - y)$. Indiquer laquelle des propositions suivantes est le $\text{Ker } f$
- $A : \{(0, 0)\}$ $B : \text{Vect}(1, 1)$ $C : \text{Vect}((2, 1, 1), (1, -1, 1))$
19. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (2x + y, x - y, x - y)$. Indiquer laquelle des propositions suivantes est le $\text{Im } f$
- $A : \text{Vect}((0, 1, 0))$ $B : \text{Vect}((2, 1, 1), (1, -1, -1))$ $C : \mathbb{R}^3$
20. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie, soit $B = (v_1, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E . Dans ce qui suit, j désigne un entier entre 1 et n . Indiquer la bonne proposition
- $A : \text{Si } B \text{ est libre alors } B - \{v_j\} \text{ est libre}$
 $B : \text{Si } B \text{ est liée alors } B - \{v_j\} \text{ est liée}$
 $C : \text{Si } B \text{ est liée alors } B - \{v_j\} \text{ est libre}$