PROGRAMME APC

Collection

PYRAMIDE

Tle D

Mon livre de MATHÉMATIQUES

JD Editions
L'Edition autrement

3 500 F CFA

Mon livre de Mathématiques TleD

COLLECTION PYRAMIDE

JD Editions

PROGRAMME APC

Collection

PYRAMIDE

Tle D

Mon livre de MATHÉMATIQUES

MAHI Louis Clément
Encadreur Pédagogique

AÏKO Okoumon Jean Claude
Encadreur Pédagogique

ZÉZÉ Phalet
Encadreur Pédagogique

KONÉ Abou
Encadreur Pédagogique

BROU Kouassi Alfred
Encadreur Pédagogique

TAHIROU Konaté
Professeur de Mathématiques

Sous la direction de

TANOH KOUACOU
Docteur en Mathématiques
Inspecteur Général de l'Éducation Nationale
et de l'Alphabétisation

JD Éditions
L'Édition autrement

21 BP 3636 Abidjan 21
Côte d'Ivoire

ISBN : 978-2-493344-23-6

DÉCOUVRIR VOTRE MANUEL

Le manuel de mathématiques de la **collection « PYRAMIDE »** des classes de **Terminale D** est le fruit d'une étroite collaboration entre plusieurs acteurs du système éducatif de Côte d'Ivoire : Inspecteurs de mathématiques, Encadreurs Pédagogiques de mathématiques et Enseignants de mathématiques des lycées et collèges.
Conforme au programme officiel en vigueur, cet ouvrage a été conçu pour accompagner efficacement la mise en œuvre de l'approche par les compétences. Ce souci d'aide et d'accompagnement des apprenants et des enseignants a amené les auteurs à intégrer à ce support pédagogique sept blocs rédactionnels :

BLOC 1 : COMMENTAIRE DE LA LEÇON

Ce bloc donne un aperçu historique de la notion mathématique, objet de l'étude. Il informe brièvement le lecteur des acquis de l'apprenant par rapport à la leçon, ce qui est attendu de lui lors du déroulement de la leçon et précise éventuellement l'évolution de la notion au cours des études ultérieures de l'apprenant. Ce bloc donne également le domaine d'application de la leçon.

BLOC 2 : HABILETÉS ET CONTENUS

Il présente pour chaque leçon, la liste des habiletés et contenus prescrits par le programme officiel en vigueur. Elle fera l'objet de découpage par le professeur afin d'organiser ses séances journalières de cours.

BLOC 3 : SITUATION D'APPRENTISSAGE

Il s'agit ici de donner du sens aux notions mathématiques et de fixer le cadre des apprentissages. Durant toute la leçon, il sera possible d'exploiter la situation d'apprentissage.

BLOC 4 : DÉCOUVERTE DES HABILETÉS

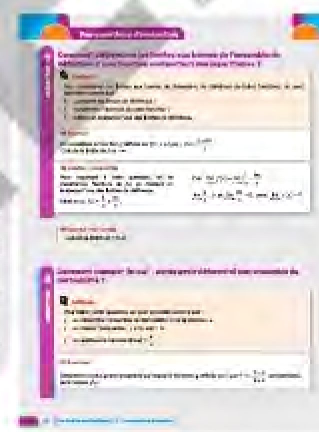
Constitué d'activités de découverte, ce bloc permet de mettre l'élève en situation de recherche. Il comprend également la synthèse de l'activité appelée « récapitulons », suivie d'un ou de plusieurs exercices de fixation.

BLOC 5 : RÉSUMÉ DE LA LEÇON

Ce bloc présente l'essentiel à retenir par l'apprenant. Il comprend des définitions, des propriétés, des remarques…
Chaque définition donnée est suivie d'un exemple et chaque propriété est suivie d'un exemple d'application. Ce bloc oriente les apprenants à travers la rubrique « pour s'entraîner » vers certains types d'exercices contenus dans le bloc «mes séances d'exercices».

BLOC 6 : DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

Il est constitué de plusieurs habiletés/contenus exigibles selon le programme. Chaque habileté/contenu retenu est formulé sous la forme d'une question. Un point méthode relatif à l'habileté/contenu est proposé au lecteur. Ce point méthode est suivi d'un exercice corrigé et commenté. Un autre exercice du même type est proposé afin de vérifier l'acquisition de l'habileté/contenu retenu.



BLOC 7 : MES SÉANCES D'EXERCICES

Ce bloc est composé d'exercices de fixation, d'exercices de renforcement, d'exercices d'approfondissement et de situations d'évaluation. L'objectif ici est de renforcer les acquis installés durant le déroulement de la leçon.

Les auteurs voudraient s'excuser pour d'éventuelles erreurs ou fautes de frappe contenues dans ce manuel. Ils vous remercient d'avance de bien vouloir les signaler à l'adresse : jdeditions@yahoo.fr, afin de contribuer à l'amélioration continue du présent ouvrage.

Comment utiliser ce manuel

Pour l'élève

- Commentaire de la leçon : Il t'indiquera l'historique de la notion que tu vas étudier. Il te dira ce que tu as déjà appris sur cette notion et ce que deviendra la notion au cours de tes études ultérieures.
- Habiletés et contenus : Il t'informera sur ce que tu dois savoir et ce que tu dois savoir faire à l'issue de cette leçon. Tu t'entraîneras sur chaque habileté/contenu afin de t'auto - évaluer.
- Situation d'apprentissage : Tu liras la situation d'apprentissage avant de venir en classe. Si tu ne la comprends pas, tu poseras ensuite des questions à ton professeur le jour de la leçon.
- Découverte des habiletés : Tu exécuteras les consignes que ton professeur te donnera. Mais avant de venir en classe, tu essayeras de lire les consignes qui sont dans ton livre même si tu ne les comprends pas toujours.
- Résumé de la leçon : Tu devras retenir mais surtout comprendre le contenu de ce bloc. Des exemples y sont donnés pour faciliter ta compréhension. Tu utiliseras le contenu de ce bloc pour préparer les séances d'exercices, les contrôles continus et les questions d'évaluation. Tu utiliseras la rubrique «Pour s'entraîner» afin de mieux approfondir une habileté/contenu donnée.
- Des questions d'évaluation : Tu essayeras de comprendre le point méthode proposé dans ce bloc. Tu essayeras de faire toi-même l'exercice corrigé mais sans regarder la correction. Tu compareras ta production à la solution commentée et tu feras immédiatement l'exercice non résolu afin de t'assurer que tu as bien compris le point méthode.
- Mes séances d'exercices : Dans le résumé de cours, tu seras constamment renvoyé à cette rubrique. Tu utiliseras ces renvois pour t'entraîner sur les habiletés/contenus bien précises. Il faut varier les types d'exercices que tu résous. Tu résoudras en particulier toutes les situations d'évaluation de cette rubrique.

Pour l'enseignant

- Commentaire de la leçon : Vous utiliserez ce bloc pour :
  - motiver les apprenants à travers une brève histoire de la notion et l'évolution de la notion au cours des études ultérieures de l'apprenant;
  - préparer les prérequis nécessaires à la leçon.
- Habiletés et contenus : Vous utiliserez ce bloc pour orienter toute la leçon. Vous découperez ce bloc en séances de 55 minutes de telle sorte que ce découpage corresponde au temps imparti à la leçon. Vous veillerez à ce que la majorité des élèves comprennent les habiletés/contenus de ce bloc.
- Situation d'apprentissage : Vous ferez lire en classe la situation d'apprentissage directement dans le manuel de l'apprenant. Vous pourrez mettre les apprenants en groupe pour aider ceux qui n'ont pas de manuel. Vous ferez dégager les constituants de la situation par les élèves avant d'annoncer le plan de la leçon. En tout état de cause, vous pouvez consulter le guide du professeur de ce manuel.
- Découverte des habiletés : Vous utilisez ce bloc pour mettre les apprenants en activités ; donnez-leur un temps de recherche ponctué par des aides collectives ou individuelles ; la phase de formulation à l'issue de la recherche correspond à la rubrique « récapitulons » ; essayez de la faire formuler par les apprenants avant d'aborder la trace écrite et l'exercice de fixation.
- Résumé de la leçon : L'enseignant pourra utiliser ce bloc pour évaluer les niveaux taxonomiques relatifs à la connaissance, à la compréhension et à l'application. Cette utilisation de ce bloc par l'enseignant incitera les apprenants à apprendre et à comprendre l'essentiel à retenir par rapport à une leçon donnée. La rubrique «pour s'entraîner» aidera l'enseignant à opérer des choix d'exercices par rapport à ses objectifs opérationnels.
- Des questions d'évaluation : Les questions d'évaluation ne sont pas à faire uniquement à la fin de la leçon. Elles peuvent être utilisées en classe au cours de la leçon ou lors des séances de travaux dirigés. L'enseignant pourra commenter avec ses élèves le point méthode, l'exercice commenté pour mieux faire comprendre le point méthode et soumettre ensuite ses élèves à l'exercice non corrigé.
- Mes séances d'exercices : Le professeur utilisera ce bloc pour faire travailler les apprenants aussi bien en classe qu'à la maison. Il s'en servira aussi pour animer des séances de travaux dirigés directement avec le manuel, grâce à la sélection d'exercices appropriés. Les situations complexes sont à faire traiter par les élèves.

Pour le parent d'élève

- Commentaire de la leçon : Le parent s'informera sur l'histoire de la notion, discutera avec ses enfants afin de les motiver à aborder la leçon.
- Habiletés et contenus : Le parent suivra les acquis de son enfant en l'amenant à s'exercer sur chaque habileté/contenu de ce bloc.
- Situation d'apprentissage : Le parent fera lire la situation d'apprentissage de la prochaine leçon à son enfant à la maison dès qu'il se rendra compte qu'une leçon est terminée. Il pourra essayer d'expliquer s'il le peut ce dont il est question dans la situation.
- Découverte des habiletés : Le parent vérifiera à la maison si l'enfant a compris l'activité de découverte et qu'il sait faire l'exercice de fixation qui lui est rattaché.
- Résumé de la leçon : Le parent utilisera ce bloc pour s'assurer que l'enfant apprend sa leçon. Sans être un spécialiste de la discipline, il peut utiliser ce bloc pour évaluer les connaissances de son enfant.
- Des questions d'évaluation : Le parent utilisera cette rubrique pour vérifier les acquis de ses enfants par rapport à une habileté précise. Il encouragera ses enfants à traiter cette rubrique et s'assurera avec l'aide du professeur que ses enfants ont bien acquis l'habileté retenue.
- Mes séances d'exercices : Le parent peut faire travailler ses enfants en utilisant ce bloc et en les encourageant à faire des exercices variés.

Sommaire

1 LIMITES ET CONTINUITÉ

Commentaire de la Leçon

La notion de « limite » fait son apparition dans un ouvrage du mathématicien anglais Benjamin Robins en 1735. Robins essaie de préciser et de clarifier l'expression un peu obscure de Newton, « premières et dernières raisons » en parlant de « limites » vers quoi tendent, sans jamais les atteindre, des rapports de quantités variables.

En 1823, le mathématicien français A. Louis Cauchy introduit la notation de « lim » pour limite. En classe de Première, les limites de fonctions de référence, les limites d'une fonction en un point et les opérations sur les limites sont étudiées pour la première fois.

En classe de Terminale, il s'agira d'étudier les limites de fonction composée et de fonction continue monotone sur un intervalle ouvert. La plupart des propriétés ont été abordées en classe de première. Ces propriétés tout comme les techniques des calculs pour lever l'indétermination, ne doivent pas faire l'objet d'un traitement théorique. Elles seront mises assez rapidement en œuvre dans des exercices dont le niveau de technicité et l'abondance doivent rester très raisonnable car elles seront réinvesties tout au long de l'année dans les études de fonctions.

La propriété sur la limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert sera utilisée dans les suites et les fonctions définies par intégrale. L'étude générale des branches infinies est hors programme. L'étude des limites sera approfondie dans l'enseignement supérieur avec les notions d'espace topologique et de filtres. Les sciences expérimentales utilisent à plusieurs niveaux les limites au quotidien.

Habiletés et Contenus

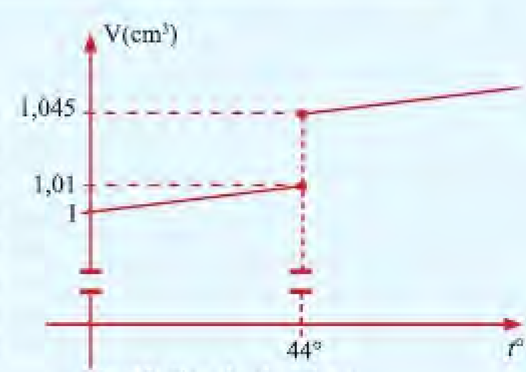
- **Identifier** les notions de branches paraboliques de direction celle de (OI) ou celle de (OJ) dans un repère (O, I, J) ; une racine $n^{ième}$ d'un nombre positif ; une puissance d'exposant rationnel .
- **Connaître** la propriété relative à la limite d'une fonction composée ; la propriété relative à la limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert ; les propriétés relatives aux opérations sur les fonctions continues sur un intervalle ; la propriété relative à la composée de deux fonctions continues sur un intervalle ; les propriétés relatives à l'image d'un intervalle par une fonction continue : (en utilisant son tableau de variation ; en utilisant une méthode algébrique) ; le théorème des valeurs intermédiaires ; les propriétés relatives aux fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle ; les méthodes de dichotomie et de balayage ; les propriétés relatives aux puissances d'exposants rationnels.
- **Noter** une racine $n^{ième}$ d'un nombre positif ($\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$) ; une puissance d'exposant rationnel ($x^{\frac{p}{q}}$).
- **Déterminer** la limite d'une fonction (en utilisant les limites de référence , en utilisant une expression conjuguée , en utilisant la définition d'un nombre dérivé , en utilisant les propriétés de comparaison) ; (minoration, majoration et encadrement) ; la limite d'une fonction composée ; l'image d'un intervalle par une fonction continue (en utilisant son tableau de variation , en utilisant une méthode algébrique) ; une valeur approchée d'une solution d'une équation ; le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = k$; la formule explicite d'une bijection réciproque quand cela est possible ; un prolongement par continuité d'une fonction en un point.
- **Représenter** la courbe de la bijection réciproque d'une bijection dans un repère orthonormé ; graphiquement des fonctions du type :

  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ $(n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}_+^*)$

  $x \mapsto x^r$ $(r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}_+^*)$
- **Interpréter**
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (respectivement $-\infty$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (respectivement $-\infty$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ $(resp -\infty)$
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ (respectivement $-\infty$) et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ (respectivement $-\infty$) et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ $(resp -\infty)$
- **Démontrer** qu'une fonction f est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J dans le cas où f est continue et strictement monotone sur I ; l'existence d'une unique solution de l'équation $f(x) = m$ (m réel) sur un intervalle I, f étant continue et strictement monotone sur I ; l'existence d'une unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur un intervalle ouvert $]a ; b[$, f étant continue et strictement monotone sur $[a ; b]$.
- **Traiter une situation** faisant appel aux limites et à la continuité d'une fonction

Situation d'Apprentissage

Pendant le cours de Physique, des élèves de terminale étudient la variation d'un cm³ de phosphore en fonction de la température. De 0° à 44°, le volume augmente insensiblement et de façon continue. À 44°, si peu qu'on élève la température, le volume augmente brusquement de 35 mm³ et le phosphore se liquéfie. Au-delà de 44°, le volume augmente à nouveau insensiblement et de façon continue (voir figure). Les élèves trouvent le phénomène autour de 44° inhabituel. Pour comprendre ce phénomène, ils décident d'étudier le comportement du volume de phosphore qui s'approche de 44° aussi bien par la droite que par la gauche.



Liquéfaction du phosphore

Activité 1 Limite d'une fonction en utilisant les limites de référence (Rappel)

1. Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-6)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^5-1\right)$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4+3)$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x^3}-1)$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}+2)$.

2. La colonne de gauche désigne un ensemble de limites de fonctions et la colonne de droite propose le résultat de la limite de chacune d'entre elles . Associe chaque élément de gauche à son unique correspondant à droite.

Colonne A	Colonne B
$\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{(x-3)^4}$ •	• 0
$\lim\limits_{\substack{x\to8\\<}}\frac{1}{(x-8)^5}$ •	• $+\infty$
$\lim\limits_{x\to0}\frac{sinx}{x}$ •	• $-\infty$
$\lim\limits_{x\to0}\frac{cosx-1}{x}$ •	• 1

3. Parmi les limites proposées ci-dessous, une seule est juste. Désigne par sa lettre la limite correcte.

a) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\frac{1}{(x-1)^5}=0$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\frac{1}{(x-1)^5}=1$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\frac{1}{(x-1)^5}=-\infty$; d) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\frac{1}{(x-1)^5}=+\infty$

Récapitulons

Soit a un nombre réel et n un nombre entier naturel non nul.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^n=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^n=+\infty$ si n est pair ; $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n=-\infty$ si n est impair ; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$;

$\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^n}=+\infty$, si n est pair ; $\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}}\frac{1}{(x-a)^n}=-\infty$, si n est impair ;

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}}\frac{1}{(x-a)^n}=+\infty$, si n est impair ; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1.$

Exercice de fixation

1 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}}\frac{1}{x-3}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}}\frac{1}{x-3}$.

2 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\frac{1}{(x+1)^3}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to5\\<}}\frac{1}{(x-5)^2}$.

3 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}$.

Activité 2 Limite d'une restriction (Rappel)

1. Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \dfrac{\sqrt{x}-x}{x-1} = -\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

2. Calcule : $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$.

3. Détermine : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-x}{x-1}$.

Récapitulons

On admet que :

Soit g une fonction numérique, f la restriction de g à une partie A de son ensemble de définition et a un nombre réel. On suppose qu'il existe un intervalle I contenant a tel que $I \setminus \{a\}$ soit inclus dans A.

Si g possède une limite l au point a, alors l est la limite de f au point a.

Exercice de fixation

4 Calcule chacune des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$; b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$; c) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \dfrac{|x|-2}{2x+4}$.

Activité 3 Lien entre limite à gauche, limite à droite et limite d'une fonction en un point (Rappel)

I. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}, \text{ si } x \in]-1;+\infty[\\ \text{et} \\ f(x) = -x^2-1, \text{ si } x \in]-\infty;-1] \end{cases}$$

1. a) Calcule $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$.

   b) Calcule $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$.

2. Détermine $f(-1)$.

3. Compare les limites de f à gauche et à droite en -1 à $f(-1)$.

II. la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+x}{2x}, \text{ si } x \in]-\infty;0[\\ \text{et} \\ f(x) = -\dfrac{\sqrt{x^2}}{2x}+1, \text{ si } x \in]0;+\infty[\end{cases}$$

1. La fonction f a-t-elle une image en 0 ? Pourquoi ?

2. Détermine les limites de f à gauche et à droite en 0.

3. Détermine la limite de f en 0.

Récapitulons

- Une fonction f définie en un point a admet une limite en a si et seulement si elle admet en a une limite à gauche et une limite à droite égale à $f(a)$.
- Une fonction f non définie en un point a admet une limite l en a si et seulement si f admet en a une limite à gauche et une limite à droite égale à l.

Exercices de fixation

5 écris le numéro de l'affiramtion suivi V si l'affiramtion est vraie ou de F si elle est fausse.

f désigne une fonction définie en un point a.

	Affirmations
1	Si la limite à gauche de f au point a est égale à la limite à droite de f au point a, alors f possède une limite au point a.
2	Si la limite à gauche de f au point a est différente de la limite à droite de f au point a, alors f possède une limite au point a.
3	Si f possède une limite au point a, alors la limite à gauche de f au point a est égale à la limite à droite de f au point a.

6 On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x)=|2x+3| \text{ si } x\in]-\infty;-2] \\ f(x)=x+3 \text{ si } x\in]-2;+\infty[\end{cases}$

Calcule la limite de f en -2.

7 On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} x^2 \text{ si } x<1 \\ x+1 \text{ si } x\geq 1 \end{cases}$.

Étudie la limite de f en 1.

Activité 4 Limites et opérations sur les fonctions (Rappel)

a) Somme de deux fonctions

1. Calcule les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x}}\right)$; $\lim\limits_{x\to 4}(-2x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty}(-x^3)$; $\lim\limits_{x\to +\infty}(-2x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x}}$.

2. Détermine si possible les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x}}-2x\right)$; $\lim\limits_{x\to +\infty}(-x^3-2x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x}}-2x\right)$.

b) Produit de deux fonctions

On donne si possible les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} t(x)=-2$.

Détermine si possible les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to -\infty}(ft)(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty}(gh)(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty}(gt)(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty}(th)(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty}(fg)(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}(fh)(x)$.

c) Quotient de deux fonctions

Dans chacun des cas contenus dans le tableau ci-dessous, donne si possible la limite de $\frac{f}{g}$

1	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \ldots$
2	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f}{g}(x) \ldots$
3	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f}{g}(x) = \ldots$
4	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f}{g}(x) = \ldots$
5	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$	$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ et $g(x) > 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f}{g}(x) = \ldots$
6	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \ldots$

Récapitulons

On admettra que :
α désigne un nombre réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$, L et L' sont deux nombres réels.

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ldots$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ldots$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} (f(x) + g(x)) = \ldots$	L + L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut conclure

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ldots$	L	L > 0	L < 0	L > 0	L < 0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ldots$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} (f(x) \times g(x)) = \ldots$	L L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut conclure

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ldots$	L	L	L > 0 ou $+\infty$	L < 0 ou $-\infty$	L > 0 ou $+\infty$	L < 0 ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ldots$	L' ≠ 0	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)<0$	0 avec $g(x)<0$	0	L' > 0	L' < 0	L' > 0	L' < 0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \ldots$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	On ne peut conclure	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	On ne peut conclure

Exercices de fixation

8 On donne : $f(x) = x^2 + 2x + 5$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$.
Calcule la limite de la fonction $f + g$ en $+\infty$.

9 Donne la bonne réponse si possible ou écris Forme Indéterminée (F.I) lorsqu'on ne peut pas conclure.

1	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -4$	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} fg(x) = \ldots$
2	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} fg(x) = \ldots$
3	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} fg(x) = \ldots$
4	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$	$\lim\limits_{x\to-\infty} fg(x) = \ldots$

10 On donne : $f(x) = \dfrac{x+1}{x-4}$ et $g(x) = x - 8$.
Calcule la limite de la fonction $f \times g$ en 2.

11 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

L est un nombre réel positif non nul. On donne :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.

1. On ne peut conclure pour la limite de $\dfrac{g}{f}$ en $+\infty$.
2. On ne peut conclure pour la limite de $\dfrac{f}{h}$ en $+\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{g(x)} = 0$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ est toujours égale à $+\infty$.

12 On donne : $f(x) = -1 + \cos x$ et $g(x) = \sin x$.
Calcule la limite de $\dfrac{f}{g}$ en 0.

13 On donne : $f(x) = 1 - \cos^2 x$ et $g(x) = x \tan x$
Calcule la limite de $\dfrac{f}{g}$ en 0.

Activité 5 Limite d'une fonction composée

On donne les fonctions numériques f et g définies par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{x+3}$.

On pose : $h(x) = gof(x)$

1. Donne l'expression de $h(x)$.
Calcule : $\lim\limits_{x\to0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{\dfrac{5x+4}{x+1}}$.
2. Compare $\lim\limits_{x\to1} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{\dfrac{5x+4}{x+1}}$.

Récapitulons

On admettra que :
f et g étant deux fonctions numériques, a, l et l' des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to l} g(x) = l'$, alors $\lim\limits_{x\to a} gof(x) = l'$

Exercices de fixation

14 Détermine chacune des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan(3x)}{x}$.

15 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-1} \sqrt{x^2+x+2}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+2}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+2}$.

16 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-3} |7x-1|$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} |7x-1|$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} |7x-1|$.

Activité 6 Limite par comparaison

1. a) Justifie que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $x-1 \leq \sin x + x$
   b) Calcule : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)$.
   c) Conjecture le calcul de : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin x + x)$.
2. a) Justifie que :
   $\forall x \in]0;+\infty[$, $1-\dfrac{1}{x^2} \leq 1-\dfrac{\cos x}{x^2} \leq 1+\dfrac{1}{x^2}$.
   b) Calcule : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.
   c) Conjecture : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\cos x}{x^2}\right)$.

Récapitulons

On admettra que :
Soit f une fonction.

- S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur un intervalle] A ; +∞[et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- S'il existe une fonction g telle que $f \leq g$ sur un intervalle] A ; +∞[et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
- S'il existe deux fonctions g et h telles que $g \leq f \leq h$ sur un intervalle] A ; +∞[et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.
- S'il existe un nombre réel l, une fonction g et un intervalle] A ; +∞[tels que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et $\forall x \in]A\,;+\infty[$, $|f(x) - l| \leq g(x)$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Exercices de fixation

17 En utilisant les propriété de comparaison, détermine : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos x + \sqrt{x}\right)$.

18 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ sachant que la fonction $x \mapsto \sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x + E(x))$ sachant que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $E(x) \leq x$.

Activité 7 : Calcul de limite en utilisant la définition du nombre dérivé

On donne les fonctions numériques f, g et h définies par : $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ et $h(x) = \tan x$.

1. Justifie que : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = f'(0)$ et détermine cette limite.
2. Détermine de la même manière les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

Récapitulons

Pour calculer des limites, on peut dans certains cas utiliser la définition du nombre dérivé d'une fonction en un point.
Si f est dérivable en a, on a alors : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

Exercices de fixation

19 En utilisant le nombre dérivé d'une fonction en un point, calcule : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{1-x}$.

20 Calcule les limites suivantes en utilisant un nombre dérivé d'une fonction en un point.

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$.

Propriétés admises — Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert

Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a\,;\,b[$.

- Si f est majorée sur $]a\,;\,b[$, alors f admet une limite finie à gauche en b.
- Si f est minorée sur $]a\,;\,b[$, alors f admet une limite finie à droite en a.

Soit f une fonction décroissante sur un intervalle ouvert $]a\,;\,b[$.

- Si f est majorée sur $]a\,;\,b[$, alors f admet une limite finie à droite en a.
- Si f est minorée sur $]a\,;\,b[$, alors f admet une limite finie à gauche en b.

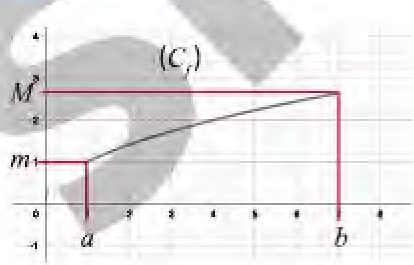
Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a\,;\,b[$.

- Si f est non majorée sur $]a\,;\,b[$, alors f a pour limite $+\infty$ à gauche en b.
- Si f est non minorée sur $]a\,;\,b[$, alors f a pour limite $-\infty$ à droite en a.

Soit f une fonction décroissante sur un intervalle ouvert $]a\,;\,b[$.

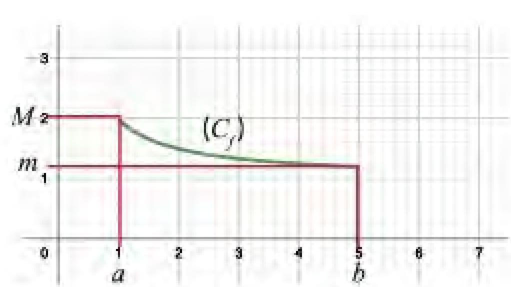
- Si f est non majorée sur $]a\,;\,b[$, alors f a pour limite $+\infty$ à droite en a.
- Si f est non minorée sur $]a\,;\,b[$, alors f a pour limite $-\infty$ à gauche en b.

Illustrations



$\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = L \ (L \in \mathbb{R})$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \ell \ (\ell \in \mathbb{R})$



$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = L' \ (L' \in \mathbb{R})$

$\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = \ell' \ (\ell' \in \mathbb{R})$

Exercice de fixation

21 Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) Si f est croissante et majorée sur $]1\ ;\ 3[$, alors f a pour limite $+\infty$ à gauche en 3.

b) Si f est décroissante et non minoré sur $]-1\ ;\ 2[$, alors f a pour limite $-\infty$ à gauche en 2.

c) Si f est croissante et majorée sur $]-2\ ;\ 5[$, alors f a une limite $+\infty$ à gauche en 5.

d) Si f est décroissante et minorée sur $]1\ ;\ 4[$, alors f a une limite finie à gauche en 4.

Activité 8 Continuité en un point

1. On donne les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x)=|x-2| \text{ et } \begin{cases} g(x)=-2 \text{ si } x\in[-3\ ;\ 0[\\ \text{et} \\ g(x)=1 \text{ si } x\in[0\ ;\ 2[\end{cases}$$

a) Détermine $f(0)$ et $g(0)$.

b) Détermine les limites à gauche et la limite à droite de f en 0 et compare les à $f(0)$.

c) Détermine les limites à gauche et à droite de g en 0 et compare les à $g(0)$.

2. Soit p et q deux fonctions de références d'ensemble de définition E.

   a) Justifie que $p+q$ est continue en tout point de E.

   b) Justifie que $p\times q$ est continue en tout point de E.

Récapitulons

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a.
f est continue en a si elle admet en a une limite égale à $f(a)$.
Toute fonction qui est somme, produit ou quotient de fonctions de références est continue en tout élément de son ensemble de définition.

Exercices de fixation

22 On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases}-x \text{ si } x<0 \\ \sqrt{x} \text{ si } x\geq 0\end{cases}$$

Étudie la continuité de f en 0.

23 On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases}x+1 \text{ si } x>-1 \\ 2x-5 \text{ si } x\leq -1\end{cases}$$

Étudie la continuité de f en -1.

24 Dans chacun des cas suivants, note le numéro des fonctions continues en tout point de l'intervalle I donné.

1. La fonction f est telle que : $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; $I=]0\ ;+\infty[$;
2. La fonction g est telle que : $g(x)=\sqrt{x}\sin x$; $I=]0\ ;+\infty[$;
3. La fonction h est telle que : $h(x)=\dfrac{x}{\cos x}$; $I=]0\ ;+\infty[$;
4. La fonction k est telle que : $k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$; $I=[0\ ;+\infty[$.

Activité 9 Prolongement par continuité

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = 3 - \dfrac{x^2-1}{x-1} \text{ si } x < 1 \\ f(x) = 2\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right) \text{ si } x > 1 \end{cases}$.

1. Détermine E, l'ensemble définition de f.
2. Justifie que f admet une limite finie l en 1.

On donne la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \in E \\ g(1) = l \end{cases}$.

3. Justifie que g est continue au point 1.

Récapitulons

Soit f une fonction et a un nombre réel n'appartenant pas à l'ensemble de définition D_f de f.

On suppose que f admet une limite finie l en a.

La fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in D_f \setminus \{a\} \\ l \text{ si } x = a \end{cases}$ est continue en a.

Elle est appelée le prolongement par continuité de f au point a.

Exercices de fixation

25 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

1. Démontre que f admet un prolongement par continuité au point 2.
2. Définis ce prolongement.

26 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$.

1. Démontre que f admet un prolongement par continuité en 0.
2. Définis ce prolongement g.

Activité 10 Continuité sur un intervalle – opérations sur les fonctions continues

1. On considère la fonction polynôme p définie par : $p(x) = 2x^5 + x^2 - 3x - 1$.

   Justifie que p est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a un nombre réel de I.

   a) Justifie que la fonction $f + g$ est continue sur I.

   b) Justifie que la fonction $|f|$ est continue sur I.

   c) Justifie que, si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

   d) Justifie que, si f est positive sur I, la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Récapitulons

On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et λ un nombre réel.

- les fonctions $f+g$, fg ; λf et $|f|$ sont continues sur I.
- Si g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I.
- Si f est positive sur I, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Exercices de fixation

27 Recopie et réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

1. La fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-1\ ;\ 1[$.
3. La fonction $h : x \mapsto \dfrac{x}{x+3}$ est continue sur $]-3\ ;\ +\infty[$.

28 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{3-x}}{x+2}$.

Étudie la continuité de la fonction f sur son ensemble de définition.

Activité 11 Image d'un intervalle par une fonction continue

1. f est continue sur l'intervalle I.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = -2x + 3$, continue sur l'intervalle $I = [1\ ;\ 4]$.

a) Pour tout $x \in I$, donne un encadrement de $f(x)$.

b) Détermine l'image de I par f.

2. f est continue et strictement monotone

On considère la fonction f continue et strictement croissante sur $[1\ ;\ 3]$ définie par : $f(x) = x^2$.

Justifie que : $f([1\ ;\ 3]) = [1\ ;\ 9]$.

Récapitulons

On admettra que :

Si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

On admettra que :

a, b, ℓ et L sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty\ ;\ +\infty\}$ tels que $a < b$.

f est une fonction telle que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = L$.

- Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a\ ;\ b]$, alors $f([a\ ;b]) = [f(a)\ ;\ f(b)]$.
- Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $]a\ ;\ b[$, alors $f(\,]a\ ;b[) =]\ell\ ;\ L[$.
- Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[a\ ;\ b]$, alors $f(\,[a\ ;b]) = [f(b)\ ;\ f(a)]$.
- Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $]a\ ;\ b[$, alors $f(\,]a\ ;b[) =]\,L\ ;\ \ell\,[$.

Exercice de fixation

29 On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 2$.

Justifie que l'image de l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$ par f est contenue dans un intervalle I' que l'on déterminera.

30 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On suppose que f est continue et croissante sur $]-1\ ;\ 3]$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = 5$ et $f(3) = 19$.

Détermine l'image de l'intervalle $]-1\ ;\ 3]$ par f.

31 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On suppose que f est continue et décroissante sur $[7\ ;\ 13]$ et $f(7) = 0$ et $f(13) = -10$.

Détermine l'image de l'intervalle $[7\ ;\ 13]$ par f.

32 Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x^2$.

1. Détermine l'image de l'intervalle $[-3\ ;\ -1]$ par g.
2. Détermine l'image de l'intervalle $[1\ ;\ 4]$ par g.

Activité 12 Continuité d'une fonction composée

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur I, telle que $f(I) \subset J$ et g une fonction continue sur J.

Justifie que la fonction gof est continue sur I.

Récapitulons

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction continue sur I, telle que $f(I) \subset J$ et g une fonction continue sur J.

La fonction gof est continue sur I.

Exercice de fixation

33 Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Recopie et réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) si $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = \sqrt{x}$, alors gof est continue sur $\mathbb{R}$.

b) si $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ et $g(x) = \sin x$, alors gof est continue sur $\mathbb{R}$.

c) si $f(x) = x^2 - 4$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$, alors gof est continue sur $\mathbb{R}$.

Activité 13 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

On suppose que $a < b$.

1. En utilisant les résultats de l'activité 12, justifie que tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent compris entre a et b.
2. Étudie le cas où c est égal à zéro.

Récapitulons

- Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.
- Tout nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent par f compris entre a et b.
- Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue sur un intervalle I. a et b sont deux éléments de I.

On suppose que : $a < b$.

Si $f(a)\,f(b) < 0$, c'est-à-dire si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors il existe un élément x de $[a\,;\,b]$ tel que : $f(x) = 0$.

Exercice de fixation

34 Soit f une fonction continue sur $[0\,;\,1]$ telle que $f([0\,;\,1]) = [-1\,;\,4]$.

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) 3 admet au moins un antécédent par f dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

b) 0 n'a pas d'antécédent par f dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

c) L'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Activité 14 Fonction continue et strictement monotone

1. On considère une fonction f continue et strictement croissante sur un intervalle I.
   Justifie que f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
2. Soit la fonction f définie par : $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ et strictement croissante sur $I = [0;+\infty[$.
   a) Justifie que f est une bijection de I sur un intervalle K à déterminer.
   b) On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Détermine l'expression de $f^{-1}(x)$.
   c) Étudie la continuité de f^{-1} sur K.
   d) Détermine le sens de variation de f^{-1}.

Récapitulons

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I détermine une bijection de I sur $f(I)$.

Soit f est une bijection d'un intervalle I sur l'intervalle $f(I)$.

si f est continue et strictement monotone sur I, alors sa bijection réciproque f^{-1} est également continue et strictement monotone sur $f(I)$; de plus f et f^{-1} ont le même sens de variation.

Exercice de fixation

35 Soit la fonction f définie sur $]1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

a) Justifie que f est une bijection de $]1 ; +\infty[$ sur $]0 ; +\infty[$.

b) Donne le sens de variation de la fonction f^{-1}.

c) Détermine l'expression de $f^{-1}(x)$.

Activité 15 Asymptotes (Rappel)

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

1. Soit la fonction f définie sur $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[$ par $f(x)=\dfrac{x+3}{1-2x}$.
   a) Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   b) Détermine $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)$.

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $g(x)=x+1-\dfrac{2}{x-1}$.
   a) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
   b) Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x)-(x+1)\right]$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(x+1)\right]$

Récapitulons

Soit f une fonction de courbe représentative (C) dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

- On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote à la courbe (C) en $+\infty$ ou en $-\infty$ lorsque la fonction f a une limite finie ℓ en $+\infty$ ou en $-\infty$.
- On dit que la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote à la courbe (C) lorsque la fonction f admet une limite infinie à droite ou à gauche au point x_0.

Soit f une fonction de courbe représentative (C) dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}$ $[f(x)-(ax+b)] = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}$ $[f(x)-(ax+b)] = 0$, on dit que la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote à la courbe (C) $+\infty$ ou en $-\infty$.

Exercices de fixation

36 Soit g la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I ,J).

Détermine les asymptotes de la courbe (C).

37 On pose : $g(x)=\dfrac{-x^2+2x+1}{x}$.

Justifie que la droite d'équation $y = 2 - x$ est une asymptote à la courbe représentative de la fonction g

Activité 16 Branches paraboliques

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x)=\dfrac{1}{x}+x^2$ et $g(x)=-2\sqrt{x}$; (C_f) et (C_g) les courbes représentative de f et g dans le repère (O, I, J).

1. Soit M(x, $f(x)$) un point de (C_f) (M ≠ O).

   a) Justifie que $\dfrac{f(x)}{x}$ est le coefficient directeur de la droite (OM).

   b) Étudie la position limite de la droite (OM) pour x suffisamment grand.

2. Soit N(x, g(x)) un point de la courbe (C_g) (N ≠ O).

   a) Justifie que $\dfrac{g(x)}{x}$ est le coefficient directeur de la droite (ON).

   b) Étudie la position limite de la droite (ON) pour x suffisamment grand.

Récapitulons

On suppose que f a une limite infinie lorsque x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$.

Lorsque la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ ou en $+\infty$ est nulle, alors on dit que la courbe représentative de la fonction f admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses, en $-\infty$ ou en $+\infty$.

Lorsque la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ ou en $+\infty$ est infinie, alors on dit que la courbe représentative de la fonction f admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées en $-\infty$ ou en $+\infty$.

Exercice de fixation

38 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+\sqrt{x^2+1}$.

a) Détermine la limite de f en $+\infty$.

b) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

c) Interprète ces résultats.

Activité 17 Fonction racine n-ième

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 1 et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x^n$.

1. Justifie que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle K à déterminer.
2. Justifie que f admet une bijection réciproque de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

Récapitulons

n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

On appelle fonction racine $n^{\text{ième}}$, la bijection réciproque de la bijection : $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$x \mapsto x^n$

Exercice de fixation

39 On considère l'application f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à tout x associe x^2.

Détermine la bijection réciproque de f.

Activité 18 Fonction puissance d'exposant rationnel

Étant donné un nombre rationnel r, il existe au moins un couple (p, q) appartenant à $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que : $r = \frac{p}{q}$.

On définit x exposant $\frac{p}{q}$, le nombre réel noté $x^{\frac{p}{q}}$ tel que : $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$.

1. Posons $r = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$).

   Justifie que la définition $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$ ne dépend pas du choix de l'écriture de r. (On pourra justifier que si $r = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, alors $\left(x^{p}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{p'}\right)^{\frac{1}{q}}$. ($p \in \mathbb{Z}$, $p' \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $q' \in \mathbb{N}^*$).
2. Soit $r \in \mathbb{Q}$ et $r' \in \mathbb{Q}$, justifie que : $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$.

Récapitulons

- Soit x un nombre réel positif ou nul . p et q sont deux entiers naturels non nuls. On a :

  $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}$; $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$.
- On admet qu'on peut étendre aux puissances d'exposant rationnel, toutes les propriétés des puissances d'exposant entier.

Exercice de fixation

40 Écris sous la forme d'une puissance d'exposant rationnel les nombres suivants :

a) $\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{10}{21}\right)^{\frac{2}{3}}$; b) $\left(5^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{6}{25}}$; c) $\frac{7^{\frac{3}{4}}}{8^{\frac{3}{4}}}$; d) $2^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{3}{5}}$.

I. LIMITE (Rappel)

1) Limites de référence

Propriété

Soit a un nombre réel et n un nombre entier naturel non nul.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$, si n est pair ;

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$, si n est impair ; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$;

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$, si n est pair ;

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = -\infty$, si n est impair ;

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$, si n est impair ;

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$;

Exemple d'application

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^6} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^7} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^6 = +\infty$.

Pour s'entraîner : Exercice 1 ; 2

2) Limite d'une restriction

Propriété

Soit g une fonction numérique, f la restriction de g à une partie A de son ensemble de définition et a un nombre réel. On suppose qu'il existe un intervalle I contenant a tel que $I \backslash \{a\}$ soit inclus dans A.

Si g possède une limite l au point a, alors l est la limite de f au point a.

Exemple d'application

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{x - 2}.$$

On se propose de déterminer $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

On a : $\lim\limits_{x \to 2}(4 - x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 2}(2 - x) = 0$.

La propriété relative à la limite d'un quotient de deux fonctions ne permet pas de conclure.

Pour tout x élément de $\mathbb{R}$ - {2}, on a :

$f(x) = \dfrac{(2+x)(2-x)}{x-2}$, donc $f(x) = -x - 2$.

f est donc la restriction à $\mathbb{R}$ - {2} de l'application

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto -x - 2$

$\lim\limits_{x \to 2}(-x - 2) = -4$, donc :

$\lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{4 - x^2}{x - 2}\right) = -4$.

Dans la pratique, on procède à une simplification de l'expression de $f(x)$ sur son ensemble de définition pour calculer sa limite.

Pour s'entraîner : Exercice 3 ; 4

3) Lien entre limite à gauche, limite à droite et limite d'une fonction en un point (Rappel)

Propriété

- Une fonction f définie en un point a admet une limite en a si et seulement si elle admet en a une limite à gauche et une limite à droite égale à $f(a)$.
- Une fonction f non définie en un point a admet une limite l en a si et seulement si f admet une limite à gauche et une limite à droite égale à l.

Exemple d'application

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty;-1[, f(x) = x^2 + 1 \\ \forall x \in [-1;+\infty[, f(x) = x^3 \end{cases}$$

La limite à gauche de f en -1 est égale à 2 et la limite à droite de f en -1 est égale à -1.

Ces deux limites sont différentes, donc f n'admet pas de limite au point -1.

Soit g la fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty;-2[, g(x) = x^2 + 1 \\ \forall x \in [-2;+\infty[, g(x) = -2x + 1 \end{cases}$$

$g(-2) = 5$. La limite à gauche de g en -2 est égale à 5 et la limite à droite de g en -2 est égale à 5.

g admet en -2 une limite à droite et une limite à gauche toutes égales à $g(-2)$.

Donc g possède une limite au point -2.

Pour s'entraîner : Exercice 5 ; 6; 7

4) Limites et opérations sur les fonctions

- **Limite de la somme de deux fonctions**

Propriété

α désigne un nombre réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$, L et L' sont deux nombres réels.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ldots$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \ldots$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)+g(x)) = \ldots$	L + L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut conclure

Exemple

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x}) = +\infty$ car :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Par contre, l'on ne peut conclure quant à la détermination de $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+\sqrt{x})$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$.

• Limite du produit de deux fonctions (Rappel)

Propriété

α désigne un nombre réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$, L et L' sont deux nombres réels.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L > 0	L < 0	L > 0	L < 0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)\times g(x)) =$	L L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut conclure

Exemple d'application

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-2x^2+x-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2+x-3}{-3x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{-3x^2}=-\dfrac{2}{3}$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-2x^2+x-1\right)\left(\dfrac{2x^2+x-3}{-3x^2-1}\right)=+\infty.$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-2x^2+x-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+x-3}{-3x^3+5}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{-3x}=0$

Par conséquent, l'on ne peut conclure directement quant à la détermination de :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-2x^2+x-1\right)\left(\dfrac{2x^2+x-3}{-3x^3+5}\right).$

• Limite du quotient de deux fonctions

Propriété

α désigne un nombre réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$, L et L' sont deux nombres réels.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \dots$	L	L	L > 0 ou $+\infty$	L < 0 ou $-\infty$	L > 0 ou $+\infty$	L < 0 ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \dots$	L' ≠ 0	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)<0$	0 avec $g(x)<0$	0	L' > 0	L' < 0	L' > 0	L' < 0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dots$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	On ne peut conclure	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	On ne peut conclure

Exemple d'application

On a : $\lim\limits_{x\to-1}\left(-2x^2+x-1\right)=-4$

et $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)=-1$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{-2x^2+x-1}{\dfrac{x+3}{x-1}}\right)=\dfrac{-4}{-1}=4.$

On a : $\lim\limits_{x\to-1}\left(x^3+1\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{2x^2+x-1}{-3x^3+5}\right)=0$

Par conséquent, l'on ne peut conclure directement quant à la détermination de :

$\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{x^3+1}{\dfrac{2x^2+x-1}{-3x^3+5}}\right).$

Pour s'entraîner : Exercice 8 ; 9; 10; 11

5) Limite d'une fonction composée

Propriété

Soient f et g deux fonctions numériques. a, l et l' des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to l} g(x) = l'$, alors $\lim_{x \to a} gof(x) = l'$.

Conséquences

Soit f une fonction numérique, a un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$, l un nombre réel positif ou nul et l' un nombre réel.

- si $\lim_{x \to a} f(x) = l$, alors $\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$
- si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = +\infty$
- si $\lim_{x \to a} f(x) = l'$, alors $\lim_{x \to a} |f(x)| = |l'|$
- si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty$
- si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty$

Exemple d'application

Déterminons la limite en + ∞ de la fonction $h : x \longmapsto x[\cos(\frac{1}{x}) - 1]$.

Posons : $h = gof$ avec $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $g : x \longmapsto \frac{\cos x - 1}{x}$. On a : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$,

donc : $\lim_{x \to +\infty} x[\cos(\frac{1}{x}) - 1] = 0$. On aurait pu effectuer un changement de variable en posant : $u = \frac{1}{x}$. $\lim_{x \to +\infty} u = 0$, donc : $\lim_{x \to +\infty} x[\cos(\frac{1}{x}) - 1] = \lim_{u \to 0} \frac{\cos u - 1}{u} = 0$.

Pour s'entraîner : Exercice 12 ; 13; 14

6) Limite par comparaison

Propriété 1

Soit f une fonction.

- S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur un intervalle] A ; +∞[et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- S'il existe une fonction g telle que $f \leq g$ sur un intervalle] A ; +∞[et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

› Remarques

Des propriétés analogues existent lorsque x tend vers $-\infty$ ou lorsque x tend vers x_0. ($x_0 \in \mathbb{R}$).

Exemple d'application

Soit f une fonction numérique vérifiant l'inégalité suivante :

$\forall x \in]-5 ; +\infty[$, $f(x) + \dfrac{6}{7} \geq \dfrac{x^2}{x+5}$

Déterminons la limite de f en $+\infty$.

$\forall x \in]-5 ; +\infty[$, $f(x) \geq \dfrac{x^2}{x+5} - \dfrac{6}{7}$.

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x+5} - \dfrac{6}{7} = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Propriété 2

Soit f une fonction.

- S'il existe deux fonctions g et h telles que $g \leq f \leq h$ sur un intervalle $]A ; +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.
- S'il existe un nombre réel l, une fonction g et un intervalle $]A ; +\infty[$ tels que : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et $\forall x \in]A ; +\infty[$, $|f(x) - l| \leq g(x)$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

› Remarques

Des propriétés analogues existent lorsque x tend vers $-\infty$ ou lorsque x tend vers x_0. ($x_0 \in \mathbb{R}$).

Exemple d'application

Déterminons : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\cos x}{x^2}\right)$. $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $-1 \leq \cos x \leq 1$,

donc : $\dfrac{-1}{x^2} + 1 \leq 1 - \dfrac{\cos x}{x^2} \leq 1 + \dfrac{1}{x^2}$. Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-1}{x^2} + 1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-1}{x^2} + 1\right) = 1$.

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\cos x}{x^2}\right) = 1$.

Pour s'entraîner : exercices 15 ;16; 17; 18

7) Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert

Propriété 1

Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a\ ;\ b[$.

- Si f est majorée sur $]a\ ;\ b[$, alors f admet une limite finie à gauche en b.
- Si f est minorée sur $]a\ ;\ b[$, alors f admet une limite finie à droite en a.

Propriété 2

Soit f une fonction décroissante sur un intervalle ouvert $]a\ ;\ b[$.

- Si f est majorée sur $]a\ ;\ b[$, alors f admet une limite finie à droite en a.
- Si f est minorée sur $]a\ ;\ b[$, alors f admet une limite finie à gauche en b.

Propriété 3

Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a\ ;\ b[$.

- Si f est non majorée sur $]a\ ;\ b[$, alors f a pour limite $+\infty$ à gauche en b.
- Si f est non minorée sur $]a\ ;\ b[$, alors f a pour limite $-\infty$ à droite en a.

Propriété 4

Soit f une fonction décroissante sur un intervalle ouvert]a ; b[.

- Si f est non majorée sur $]a\ ;\ b[$, alors f a pour limite $+\infty$ à droite en a.
- Si f est non minorée sur $]a\ ;\ b[$, alors f a pour limite $-\infty$ à gauche en b.

Exemple d'application

La fonction tan est non majorée sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, donc la fonction tan admet pour limite $+\infty$ à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

Pour s'entraîner : exercices 19 : 20

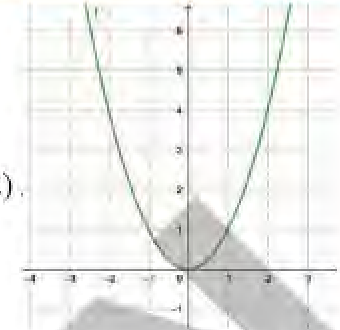
II. CONTINUITÉ

1) Continuité en un point

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a.
f est continue en a si elle admet en a une limite égale à $f(a)$.

Exemple d'application



La fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2$ est continue en 2.

En effet, f est définie en 2 ; $f(2) = 4$ et $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$ donc $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

Propriété

Toute fonction qui est somme, produit ou quotient de fonctions de références est continue en tout élément de son ensemble de définition .

Pour s'entraîner : exercices 21 ; 22; 23

2) Prolongement par continuité

Propriété et définition

Soit f une fonction et a un nombre réel n'appartenant pas à l'ensemble de définition Df de f.

On suppose que f admet une limite finie l en a.

La fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in D_f \setminus \{a\} \\ l \text{ si } x = a \end{cases}$ est continue en a.

Elle est appelée le prolongement par continuité de f au point a.

Exemple d'application

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

On a : Df = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

0 n'appartient pas à l'ensemble de définition de f ; de plus : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Donc la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est continue en 0 et est le prolongement par continuité de f au point 0.

Pour s'entraîner : exercices 24 ; 25; 26; 27; 28

3) Continuité sur un intervalle

Définition

On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

Exemple d'application

- Les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle ouvert inclus dans son ensemble de définition.

Pour s'entraîner : exercices 29

4) Opérations sur les fonctions continues

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et λ un nombre réel.

- Les fonctions $f+g$, fg ; λf et $|f|$ sont continues sur I.
- Si g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.
- Si f est positive sur I, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Exemple d'application

m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur $[a ; b]$.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x + 5$ est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus f s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $\frac{1}{f}$ est continue aussi sur $\mathbb{R}$.

5) Image d'un intervalle par une fonction continue

Propriété 1

Si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Remarques

Si f est continue sur un intervalle $[a ; b]$, alors $f([a ; b]) = [m ; M]$.
Les valeurs m et M ne sont pas forcément celles de $f(a)$ et $f(b)$.
m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur $[a ; b]$.

Propriété 2

a, b, ℓ et L sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$ tels que $a < b$.

f est une fonction telle que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = L$.

- Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a ; b]$, alors $f([a ; b]) = [f(a) ; f(b)]$.
- Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $]a ; b[$, alors $f(]a ; b[) =]\ell ; L[$.
- Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[a ; b]$, alors $f([a ; b]) = [f(b) ; f(a)]$.
- Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $]a ; b[$, alors $f(]a ; b[) =]L ; \ell[$.

Exemple d'application

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

$\sin(0) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ donc $\sin([0 ; \frac{\pi}{2}]) = [0 ; 1]$.

Pour s'entraîner : exercices 30 ; 31 ; 32

6) Continuité d'une fonction composée

Propriété

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Si f est une fonction continue sur I, telle que $f(I) \subset J$ et g une fonction continue sur J alors la fonction gof est continue sur I.

Exemple d'application

Justifions que la fonction $h : x \mapsto \tan\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Posons $h = gof$ avec $g : x \mapsto \tan x$ et $f : x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2+3}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) = [\frac{1}{3} ; 1[$. La fonction g est continue sur $]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ et $[\frac{1}{3} ; 1[\subset]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$, donc la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour s'entraîner : exercices 34; 35

7) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

Tout nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent par f compris entre a et b.

Conséquences

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue sur un intervalle I. (a ; b sont deux élément de I.)
On suppose que : $a < b$.
Si $f(a) \times f(b) < 0$, c'est-à-dire si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors il existe $c \in [a ; b]$ tel que $f(c) = 0$.

Exemple d'application

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2 + x - 1.$

f est continue sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme.

$f(0) = -1$ et $f(1) = 1$. Donc il existe un nombre réel x_0 appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$ tel que :

$f(x_0) = 0$; car $f(0) \times f(1) < 0$.

Pour s'entraîner : exercices 35; 36 ; 37; 38

8) Fonction continue et strictement monotone

Propriété 1

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I détermine une bijection de I sur $f(I)$.

Exemple d'application

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$; de plus tan $\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$ d'où la fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Propriété 2

Soit f est une bijection d'un intervalle I sur l'intervalle $f(I)$.

Si f est continue et strictement monotone sur I, alors sa bijection réciproque f^{-1} est également continue et strictement monotone sur $f(I)$; de plus f et f^{-1} ont le même sens de variation.

Exemple d'application

Soit $f : [0 ; \pi] \longrightarrow [-1 ; 1]$

$x \longmapsto \cos x$

La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue sur $[0 ; \pi]$.

De plus, elle est strictement décroissante sur $[0 ; \pi]$.

$\cos([0 ; \pi]) = [-1 ; 1]$.

Donc f est une bijection de $[0 ; \pi]$ sur $[-1 ; 1]$.

f^{-1} est continue et strictement décroissante sur $[-1 ; 1]$.

Pour s'entraîner : exercices 39; 40 ; 41; 42

III. ÉTUDE D'UNE BRANCHE INFINIE

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

1) Asymptotes

a) Asymptotes parallèles à l'un des axes

Définition

Soit f une fonction de courbe représentative (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).

- On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote à la courbe (C) lorsque la fonction f a une limite finie ℓ en $+\infty$ ou en $-\infty$.
- On dit que la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote à la courbe (C) lorsque la fonction f admet une limite infinie à droite ou à gauche au point x_0.

Exemple d'application

Soit la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$.

- la limite de f en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à 2. Donc la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote à la courbe représentative de f.
- la limite de f à droite en 1 est égale à $+\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe représentative de f.

b) Asymptotes non parallèles à l'un des axes

Définition

Soit f une fonction de courbe représentative (C) dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$, on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple d'application

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + x - 4}{x^2+1}$.

En effectuant la division euclidienne de $x^3 - 5x^2 + x - 4$ par $x^2 + 1$.

On obtient : $\dfrac{x^3 - 5x^2 + x - 4}{x^2+1} = x - 5 + \dfrac{1}{x^2+1}$.

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 5)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2+1}$.

$= 0$

Donc la droite d'équation $y = x - 5$ est une asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Pour s'entraîner : exercices 43; 44 ; 45; 46

2) Branches paraboliques -Direction asymptotique

On suppose que f a une limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$.

On étudie la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Trois cas peuvent se présenter :

- $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ a une limite infinie ;
- $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ a une limite finie ;
- $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite.

Ces cas sont résumés dans le tableau ci-dessous :

a et b désignent respectivement les limites, lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ de $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ et de $x \longmapsto f(x) - ax$.

Cas où :	Nature de la branche infinie	Exemples
$a = +\infty$ ou $a = -\infty$	La courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).	Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{x} + x^3$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + \frac{1}{x^2}) = +\infty$. La courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) en $+\infty$.
$a = 0$	La courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OI).	Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. Donc, la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OI) en $+\infty$.
b est un nombre réel et a un nombre réel non nul.	La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction g.	Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. On vérifie que : (voir exemple précédent) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$ et que : $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x) - 2x] = 0$. Donc, la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à la courbe de la fonction g.

a est un nombre réel non nul et $b = +\infty$ ou $b = -\infty$	La courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$.	Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x + \sqrt{x}$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (2 + \frac{\sqrt{x}}{x}) = 2$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ Donc la courbe représentative de fonction f admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = 2x$.
a est un nombre réel non nul et b n'existe pas	La courbe représentative de f n'a pas d'asymptote, ni de branche parabolique. Elle admet une direction asymptotique, celle de la droite d'équation $y = ax$.	Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3x + \sin x$. Pour tout nombre réel x, $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc pour tout nombre réel x, $-1 + 3x \leq f(x) \leq 1 + 3x$. De l'inégalité, $-1 + 3x \leq f(x)$, on déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} (-1 + 3x) = +\infty$. Pour tout réel strictement positif, on a ; $\frac{-1}{x} + 3 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{x} + 3$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$. $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 3x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$. Or la fonction sin n'a pas de limite à l'infini. Donc la courbe de f n'a pas d'asymptote, ni de branche parabolique. Elle admet une direction asymptotique, celle de la droite d'équation $y = 3x$.
a n'existe pas.	La courbe représentative de f n'a pas d'asymptote, ni de branche parabolique, ni de direction asymptotique. **NB** : l'étude des branches paraboliques, autres que celles des droites (OI) et (OJ) n'est pas inscrite au programme. Cependant, cette étude peut-être utile pour préparer les concours après le BAC.	Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\pi x}{2} + x\cos x$. On peut vérifier comme précédemment que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2} + \cos x$ La fonction cos n'a pas de limite à l'infini donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ n'existe pas. Donc, La courbe représentative de la fonction f n'a pas d'asymptote, ni de branche parabolique, ni de direction asymptotique.

Pour s'entraîner : exercices 47; 48 ; 49

IV. FONCTION PUISSANCE D'EXPOSANT RATIONNEL

1) Fonction racine *n-ième*

Définition

n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

On appelle fonction racine *n-ième* la bijection réciproque de la bijection : $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$x \mapsto x^n$$

Notation

y est un nombre réel positif ou nul.

L'antécédent de y par f_n est noté : $\sqrt[n]{y}$ et on lit « racine *n-ième* de y »
ou $y^{\frac{1}{n}}$ et on lit « y exposant $\frac{1}{n}$ »

› Remarques

Soient $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et $g_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
$x \mapsto x^n$ $\qquad$ $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

Les courbes représentatives des fonctions f_n et g_n dans le plan muni d'un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple d'application

La bijection réciproque de la fonction $f_5 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^5$ est la fonction racine cinquième.

Soit y un réel positif $y = x^5 \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{5}}$. On peut écrire $x = \sqrt[5]{y}$.

2) Fonction puissance d'exposant rationnel

Propriété - Définition

Soit r un nombre rationnel positif non nul tel que : $r = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ où p, q, p' et q' sont des nombres entiers naturels non nuls et x un nombre réel positif ou nul.

On a : $\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{p'}\right)^{\frac{1}{q'}}$. Par définition, $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}$.
On peut écrire : $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$. Soit r un nombre rationnel strictement négatif et x un nombre réel strictement positif. Par définition, $x^r = \frac{1}{x^{-r}}$.
On pose : $x^0 = 1$.

Propriété

r et r' étant des nombres rationnels non nuls, x et y des nombres réels strictement positifs,

$$x^r \times y^r = (xy)^r \; ; \; \left(x^r\right)^{r'} = x^{r \times r'} \; ; \; \frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r \; ; \; x^r \times x^{r'} = x^{r+r'} \; ; \; \frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}.$$

Exemple d'application

$$\frac{6^{\frac{2}{5}}}{18^{\frac{5}{7}}} = 2^{\frac{2}{5}} \times 3^{\frac{2}{5}} \times 2^{-\frac{5}{7}} \times 3^{-\frac{10}{7}} = 2^{-\frac{11}{35}} \times 3^{-\frac{29}{35}}.$$

Pour s'entraîner : exercices 50; 51 ; 52 ; 53 ; 54

QUESTION 1

Comment calculer la limite d'une fonction dans le cas où les opérations sur les limites conduisent à une forme indéterminée?

Méthode

Pour calculer la limite d'une fonction dans le cas où les opérations sur les limites conduisent à une forme indéterminée, on peut:

- utiliser une factorisation ;
- utiliser une expression conjuguée ;
- utiliser la définition d'un nombre dérivé ;
- utiliser un changement d'écriture.

Exercice

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty}(x-2\sqrt{x})$; b) $\lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{4x^2+5})$; c) $\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{x-\pi}$ d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^5}$

Solution commentée

a) Utilisons une factorisation pour calculer $\lim_{x\to+\infty}(x-2\sqrt{x})$.

$\lim_{x\to+\infty}(x-2\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)$

On a : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-2)=+\infty$,

donc $\lim_{x\to+\infty}(x-2\sqrt{x})=+\infty$.

b) Utilisons une expression conjuguée pour calculer $\lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{4x^2+5})$.

Transformons l'expression $2x+\sqrt{4x^2+5}$.

On multiplie et on divise par une expression conjuguée de $2x+\sqrt{4x^2+5}$.

$$2x+\sqrt{4x^2+5}=\frac{\left(2x+\sqrt{4x^2+5}\right)\left(2x-\sqrt{4x^2+5}\right)}{2x-\sqrt{4x^2+5}}$$

$$2x+\sqrt{4x^2+5}=\frac{(2x)^2-\left(\sqrt{4x^2+5}\right)^2}{2x-\sqrt{4x^2+5}}$$

$$=\frac{4x^2-4x^2-5}{2x-\sqrt{4x^2+5}}.$$

$$2x+\sqrt{4x^2+5}=\frac{-5}{2x-\sqrt{4x^2+5}}$$

On a : $\lim_{x\to-\infty}(2x-\sqrt{4x^2+5})=-\infty$; d'où

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-5}{2x-\sqrt{4x^2+5}}=0$$

donc : $\lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{4x^2+5})=0$.

c) Utilisons la définition d'un nombre dérivé pour calculer $\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{x-\pi}$.

On a: $\frac{\cos x+1}{x-\pi}=\frac{\cos x-\cos\pi}{x-\pi}$.

La fonction $x\mapsto\cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x-\cos\pi}{x-\pi}=(\cos)'(\pi)$$

donc $\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{x-\pi}=-\sin(\pi)=0$

d) Utilisons un changement d'écriture pour calculer $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^5}$.

On a : $\frac{\sin x}{x^5}=\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{x^4}$ Or $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

et $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}=+\infty$, donc $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^5}=+\infty$.

Exercice non corrigé

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$; b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{x-\frac{\pi}{2}}$ c) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+\sqrt{1+x^2}}{x}$

QUESTION 2

Comment calculer la limite à l'infini d'une fonction contenant des radicaux ?

Méthode

Pour calculer la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$, d'une fonction contenant des radicaux, on peut utiliser l'un des procédés suivants :

- Mettre en facteur le terme de plus haut degré.
- Introduire l'expression conjuguée.
- Utiliser consécutivement ces deux procédés.

Exercice

Calcule : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2-1}+x)$

Solution commentée

Calculons : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2-1}+x)$

Quand x tend vers $-\infty$, les propriétés sur les calculs de limites ne permettent pas de conclure.

En mettant x^2 en facteur, on a : $\forall x \in]-\infty ; \frac{-\sqrt{2}}{2}[$,

$$\sqrt{2x^2-1}+x=\sqrt{x^2(2-\frac{1}{x^2})}+x$$

$$=|x|\sqrt{(2-\frac{1}{x^2})}+x = x(-\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+1)$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+1)=1-\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}<0,$$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}x(-\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+1)=+\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2-1}+x)=+\infty$.

Exercice non corrigé

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}-5x\right)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-2}+3x\right)$

QUESTION 3

Comment encadrer une solution α de l'équation : $f(x)=0$?

Méthode

Soit f une fonction dérivable et monotone sur un intervalle [a;b] telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

Pour encadrer une solution α de l'équation $f(x)=0$, $\alpha \in]a;b[$ à une précision donnée, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- **Méthode de balayage**

Il s'agit de déterminer une valeur approchée d'un nombre réel α élément de [a ;b] tel que : $f(\alpha)=0$.
On calcule $f(a+0,1)$; $f(a+0,2)$; $f(a+0,3)$; ...
On s'arrête lorsqu'on a un résultat de signe contraire au précédent. On en déduit un encadrement de α.

- **Méthode de dichotomie**

Il s'agit de déterminer une valeur approchée d'un nombre réel α élément de [a ;b] tel que : $f(\alpha)=0$ à une précision donnée.

- Si $f(a)$ et $f(\frac{a+b}{2})$ sont de signes contraires, alors $\alpha \in [a ; \frac{a+b}{2}]$.

- Si $f(a)$ et $f(\frac{a+b}{2})$ sont de même signe, alors $\alpha \in [\frac{a+b}{2} ; b]$.

On répète cette méthode dans l'intervalle trouvé.
On s'arrête dès que l'on a la précision souhaitée.

Exercice

Sachant que l'équation $x^3 + 2x + 2 = 0$ admet une solution unique α telle que $\alpha \in]-1\,;0[$, détermine un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.

Solution commentée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 2x + 2$; l'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution $\alpha \in]-1\,;0[$.

Déterminons un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1

- Utilisons la méthode de balayage

On a : $f(-0{,}9) = -0{,}529$; $f(-0{,}8) = -0{,}112$; $f(-0{,}7) = 0{,}257$.

On s'arrête car le signe de $f(-0{,}7)$ est contraire au signe de $f(-0{,}8)$.

On conclut que : $-0{,}8 < \alpha < -0{,}7$.

- Utilisons la méthode de dichotomie

On a : $f(-1) < 0$ et $f(0) > 0$ donc $\alpha \in]-1\,;0[$;

$f\left(\frac{-1+0}{2}\right) = f(-0{,}5)$, $f(-0{,}5) > 0$ et $f(-1) < 0$ donc $\alpha \in]-1\,;-0{,}5[$.

$f\left(\frac{-1-0{,}5}{2}\right) = f(-0{,}75)$, $f(-0{,}75) > 0$ et $f(-1) < 0$ donc $\alpha \in]-1\,;-0{,}75[$.

$f\left(\frac{-1-0{,}75}{2}\right) = f(-0{,}875)$, $f(-0{,}875) < 0$ et $f(-0{,}75) > 0$, donc $\alpha \in]-0{,}875;-0{,}75[$.

$f\left(\frac{-0{,}875-0{,}75}{2}\right) = f(-0{,}8125)$; $f(-0{,}8125) < 0$ et $f(-0{,}75) > 0$, donc $\alpha \in]-0{,}8125\,;-0{,}75[$.

$f\left(\frac{-0{,}8125-0{,}75}{2}\right) = f(-0{,}78125)$; $f(-0{,}78125) < 0$ et $f(-0{,}75) > 0$, donc $\alpha \in]-0{,}78125\,;-0{,}75[$.

On conclut que : $-0{,}8 < \alpha < -0{,}7$.

Exercice non corrigé 1

L'équation (E) : $\frac{6}{5}x^5 - 4x^3 + 1 = 0$ admet une solution β telle que : $\beta \in]0\,;1[$.

Détermine un encadrement de β par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.

Exercice non corrigé 2

1. Justifie que l'équation : $2x^3 + 5x - 1 = 0$ possède une solution unique α tel que : $\alpha \in]1\,;2[$.
2. Détermine un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.

Mes séances d'exercices

Exercices de fixation

Limites de référence

1 Marque la lettre de la limite suivie de V si l'affirmation est vraie ou suivi de F si l'affirmation est fausse dans ton cahier.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\pi}{3} = 0$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin 2x}{4x} = \dfrac{3}{2}$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{1-x}{2-x} = +\infty$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x\sqrt{x}} = 0$.

2 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ <}} \dfrac{1}{(x+3)^3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{2x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x}{\sin x}$

Limite d'une restriction

3 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4-16}{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x^3+1}$

4 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{2x}{|x|}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

Limite à gauche, limite à droite et limite d'une fonction

5 Parmi les limites suivantes, relève le numéro de celle qui est juste.

1) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} \dfrac{x^3-1}{x+1} = -\infty$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \dfrac{x^3-1}{x-1} = -2$.

3) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} \dfrac{x^3-1}{x+1} = +\infty$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \dfrac{x^3-1}{x+1} = 2$.

6 On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3+8 \text{ si } x \leq -2 \\ f(x) = \sqrt{x^2+1} \text{ si } x > -2 \end{cases}$$

Étudie la limite de f en -2.

7 Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} g(x) = -2x^2+3 \text{ si } x < -1 \\ g(x) = 2+x \text{ si } -1 \leq x < 2 \\ g(x) = 0 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$

1. Étudie la limite de g en -1.
2. Étudie la limite de g en 2.

Limites et opérations sur les fonctions

8 Calcule les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 - |x| + \sqrt{x}\right)$; **2.** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{1-x}}$.

9 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$; b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}}{x+2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\cos x}$.

10 Recopie le numéro correspondant à la limite calculée suivi de V si la limite calculée est vraie ou de F si la limite calculée est fausse.

1	$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2+1}+x = +\infty$;
2	$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} = 0$;
3	$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1$;
4	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{9x+2}}{\sqrt{4x-1}} = \dfrac{3}{2}$.

11 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3} - \dfrac{x}{2}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-2}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-4} - 5x\right)$.

Limite d'une fonction composée

12 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4\pi x}{x^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{3x-1}{x+2}}$.

13 Calcule les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{\sin 8x}{2x}}$; **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left|\dfrac{2+5x-3x^2}{1+6x^2}\right|$;

3. $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{4-|x|}$.

14 Fais correspondre à chaque limite de la colonne de gauche son résultat dans la colonne de droite.

$\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+4}}$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to -\infty}\left\lvert\dfrac{-x^2+3}{2(x+1)}\right\rvert$	$-\dfrac{1}{2}$
$\lim\limits_{x\to +\infty}\cos\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$	$\dfrac{1}{2}$
	1

Limite par comparaison

15 On donne les fonctions numériques f, g, h, t et les informations suivantes :

1. $f \geq g$: $\lim\limits_{x\to -2} g(x) = +\infty$;
2. $h \geq f$: $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = -\infty$;
3. $t \leq f \leq g$: $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to 1} t(x) = 1{,}9$.

Déduis, si possible, dans chaque cas, la limite de f au point considéré.

16 On donne les fonctions f, g et h vérifiant les conditions contenues dans le tableau ci-dessous. Dis dans chaque cas si la limite de f indiquée est vraie (V) ou si elle est fausse (F).

1	$f \geq g$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$
2	$g \geq f$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$
3	$h \leq f \leq g$, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -0{,}9999$ donc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -1$
4	$\lvert f\rvert \leq g$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$

17 Soit la fonction numérique f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\sin x}{x^2}$.

1. Justifie que pour $x > 0$, on a : $-\dfrac{1}{x\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.
2. Déduis-en la limite de f en $+\infty$.

18 Calcule la limite de f en x_0 dans chacun des cas suivants :

1. On donne : $\lvert f(x)-2\rvert \leq \dfrac{3}{1+\sqrt{x}}$ avec $x_0 = +\infty$
2. On donne $f(x) = x^2\cos\dfrac{1}{x}$ $x_0 = 0$ (on montrera que : $u = \dfrac{1}{x}$ donne $-\dfrac{1}{u^2} \leq \dfrac{1}{u^2}\cos u \leq \dfrac{1}{u^2}$).
3. On donne $f(x) > \dfrac{3}{x^2}$ avec $x_0 = 0$.

Limite d'une fonction monotone sur un intervalle

19 Soit f et g deux fonctions respectivement croissante et décroissante sur un intervalle ouvert $]a\,;b[$.

On donne les lettres ou les mots ou les expressions suivantes :

1) f ; 2) a ; 3) b ; 4) finie ; 5) droite ; 6) g ; 7) minorée ; 8) gauche ; 9) $-\infty$; 10) non minorée.

Recopie et remplace chaque pointillé par le numéro correspondant à la lettre ou au mot ou à l'expression qui convient pour que la propriété soit correcte.

- Si .....est .....sur $]a\,;b[$ alors ....a pour limite ......à ....en ....
- Si .....est .... sur $]a\,;b[$ alors ....admet une limite ......à ....en ....

20

1. Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a\,;b[$ telle que : $\forall\, x \in\,]a\,;b[$, il existe un réel m vérifiant : $m < f(x)$.

   Déduis la limite de f en a .
2. Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a\,;b[$ telle que : $\forall\, x \in\,]a\,;b[$ il n'existe pas de réel M tel que $f(x) \leq M$.

   Détermine la limite de f en b .

Continuité en un point

21 On donne les fonctions numériques f et g définies par : $f(x) = \dfrac{2x-x^2}{x(x+1)}$ et $g(x) = \lvert 1-x^2\rvert$.

1. Étudie la continuité de la fonction f au point 0 et au point 2.
2. Étudie la continuité de la fonction g au point -1.

22 Dis si chacune des fonctions ci-dessous est continue au point x_0 donné. Justifie tes réponses.

$f(x)=\dfrac{x(x-2)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0)=2$ avec $x_0=0$.

$g(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ si $x \geq 0$ et $x \neq 1$, $g(1)=\dfrac{1}{2}$ avec $x_0=1$.

$$\begin{cases} h(x)=-2x^2+3 \text{ si } x<-1 \\ h(x)=2+x \text{ si } -1 \leq x<2 \\ h(x)=0 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$

avec $x_0=-1$ et aussi avec $x_0=2$.

23 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x)=-3x+2 \text{ si } x \leq -1 \\ f(x)=2x^2+ax+1 \text{ si } -1<x<0 \\ f(x)=\dfrac{x^2-1+b}{x+1} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Détermine les réels a et b pour que f soit continue en -1 et en 0.

Prolongement par continuité

24 On donne la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+4x}{x^2-1}$

Dis si chaque affirmation ci-dessous est vraie (V) ou si elle est fausse (F).

1. f admet un prolongement par continuité en 1.
2. f admet un prolongement par continuité en -1.

25 Soit les fonctions f et h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$f(x)=\dfrac{\sqrt{16-x}-2\sqrt{x+4}}{x}$ et

$$\begin{cases} h(x)=f(x) \text{ si } x \in [-4;0[\cup]0;16] \\ h(0)=-\dfrac{5}{8} \end{cases}$$

Justifie que h est le prolongement par continuité de f en 0.

26 Dis si la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+x}{|x|}$ admet un prolongement par continuité en 0. Justifie ta réponse.

27 On donne une fonction f continue sur $I=[-2\,;3]\setminus\{1\}$ et vérifiant $|f(x)-2| \leq \dfrac{x^2-1}{x+1}$.

1. f admet-elle un prolongement par continuité en 1 ? Justifie ta réponse.
2. Si oui, détermine ce prolongement par continuité.

28 Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur un intervalle K. a est un nombre réel. Dis si l'on peut prolonger dans chaque cas, la fonction f par continuité au point a. Si oui, détermine ce prolongement.

1. $f(x)=\dfrac{1+|x|}{|x|-1}$, $K=]-1\,;1[$, $|a|=1$;
2. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x-1}$, $K=[-3\,;1[$, $a=1$;
3. $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x}$, $K=]0\,;1[$, $a=0$.

Continuité sur un intervalle-Opérations sur les fonctions continues

29 Justifie que la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x}+2x^2-\dfrac{2}{x}$ est continue sur $]0\,;5[$.

Image d'un intervalle par une fonction continue

30 Dis, dans chaque cas, si l'affirmation est vraie (V) ou si l'affirmation est fausse (F).

1. $f(x)=(x-1)^2-3$ et $f([1\,;2])=[-3\,;-1]$.
2. $f(x)=-x^2+8x-3$ et $f([0\,;+\infty])=[-\infty\,;0]$.
3. $f(x)=2+\dfrac{1}{2x-3}$ et $f\left(\left]\dfrac{3}{5};5\right[\right)=\left]f\left(\dfrac{3}{5}\right);f(5)\right[$.

31 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On suppose que f est continue et croissante sur $[0\,;1]$, $f(0)=4$ et $f(1)=7$

Détermine l'image de l'intervalle $[0\,;1]$ par f.

32 Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est le suivant :

1. Détermine l'image par f de l'intervalle $[2\,;4]$.
2. Détermine l'image par f de l'intervalle $[4\,;+\infty[$.
3. Détermine l'image par f de l'intervalle $]-\infty\,;2[$.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Continuité d'une fonction composée

33 Soit les fonctions f et h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ et $g(x)=-2x^2-3x+5$

Justifie que la fonction gof est continue sur $\mathbb{R}$.

34 Justifie que la fonction g définie par $g(x)=\sqrt{2x-3}$ est continue sur $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$.

Théorème des valeurs intermédiaires

35 Réponds par vrai si l'affirmation est vraie ou par faux si l'affirmation est fausse . On donne la liste de mots ou groupes de mots suivante :

réel compris ; Tout ; continue ; contenant ; antécédent ; intervalle ; au moins.

Recopie et remplace les pointillés par le mot ou le groupe de mots qui convient.

Soit f une fonction .... sur un .... I, ... a et b deux éléments de I. ....nombre .... entre f(a) et $f(b)$ a ...... un .... par f compris entre a et b.

36 Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune de ces affirmations ci-dessous :

1. Toute fonction polynôme du second dégré admet au moins un zéro dans $\mathbb{R}$.
2. L'équation (E) : $\frac{x^3-5x+3}{x^2+1}=0$ admet au moins une solution dans [0 ; 1].
3. L'équation (F) : $\sqrt{2x^2+x+3}=2{,}1$ admet au moins une solution dans [-2 ; -1].

37 Justifie que l'équation (E) : $x^5-3x+1=0$ admet au moins une solution comprise entre 0 et 1.

38 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x)=x^3-3x-1$.

Justifie que l'équation $f(x)$ = 0 admet au moins une solution dans l'intervalle [1 ; 2].

Fonction continue et strictement monotone

39 Écris le numéro de chaque déduction suivi de V si la déduction est vraie, où de F si la déduction est fausse.

La fonction f est une bijection de E sur F, donc :

1. f est une application ;
2. f est strictement positive ;
3. f est continue sur E ;
4. f est strictement monotone sur E ;
5. f est toujours croissante ;
6. La bijection réciproque de f n'a pas le même sens de variation que f.

40 Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ et strictement croissante sur]0 ; 1[.

Justifie que f réalise une bijection de]0 ; 1[sur un intervalle J, à déterminer.

41 Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ et qui est une bijection de]0 ; 1[sur]1 ; +∞[.

Justifie que l'équation $f(x)$= 2 a une seule solution dans]0 ; 1[.

42 Soit f une fonction continue strictement croissante, définie de]0 ;+∞ [vers $\mathbb{R}$. On donne

$f(1)$ = 0 et f^{-1}, la bijection réciproque de f.

La restriction de f^{-1} à l'intervalle]-∞ ;0 [est notée g.

1. Détermine g( ]-∞ ;0 [ ).
2. Justifie que l'équation $g(x)=\frac{1}{2}$ a une seule solution dans l'intervalle]-∞ ;0 [.

Asymptotes

43 On donne la fonction f définie par : $f(x)=3-\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

Détermine les équations de droites parallèles aux axes qui sont des asymptotes à la courbe représentative de f.

44 f est une fonction numérique définie par :

$f(x)=\frac{3x-5}{1-2x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O,I,J)

1. Justifie que la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ est une asymptote verticale à (C).
2. Justifie que la droite d'équation $y=-\frac{3}{2}$ est une asymptote horizontale à (C).

45 On donne la fonction g définie par :

$g(x)=\sqrt{x^2+3x+4}$

Justifie que la droite d'équation $y=-x-\frac{3}{2}$ est une asymptote à la courbe représentative de g en −∞.

46 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

1. $f(x)=-x+1-\dfrac{1}{x^2}$ 2. $f(x)=\dfrac{2x-3}{2-x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

Dans chaque cas, détermine les équations de toutes les asymptotes à (C).

Branches paraboliques

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

47 Soit f une fonction numérique telle que :

Recopie et complète le tableau en répondant par vrai (V) si l'affirmation est vraie ou par faux (F) sinon.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$, alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation y = -1 , parallèle à (OI) .	
Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{f(x)}=-\infty$, alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OI).	
Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$, alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).	

48 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=x^2+\sqrt{x^2+1}$

a) Détermine la limite de f en $+\infty$.

b) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

d) Interprète ces résultats.

49 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

Soit la fonction g définie par : $g(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}}$.

Justifie que la courbe représentative de g admet une branche parabolique dont on déterminera la direction.

Fonction racine *n-ième* - Fonction puissance d'exposant rationnel

50 a et b sont deux nombres réels positifs, complète

$a=\sqrt[7]{b} \Leftrightarrow b...$; $b^{10}=a \Leftrightarrow a^{\cdots}=b$.

51 On considère l'application h de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à tout x associe x^5.

Justifie que la fonction $x \mapsto \sqrt[5]{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

52 On donne : $A=\dfrac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt[4]{64}}{\sqrt{\sqrt[3]{256}}}$ .Justifie que $A=8\sqrt{2}$.

53 Ecris simplement $B=\dfrac{10^{\frac{3}{2}}}{25}\times\dfrac{8^{\frac{-4}{3}}}{4^{\frac{-7}{2}}}$.

54 On donne $A=\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[3]{256}}}$ et les nombres suivants :

a) $3\sqrt{2}$; b) $\sqrt{2^3}$; c) $\sqrt[3]{2}$; d) $\sqrt{3}$

Parmi ces nombres, donne celui qui est égal à A. Justifie ta réponse.

Exercices de renforcement / approfondissement

55 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\sqrt{x-3}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1. Calcule la limite de f en $+\infty$ puis celle de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.
2. Donne une interprétation graphique de ces résultats.

56 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x)=\sqrt{x^2+1}+x^2$.

On note (C) la courbe représentative f dans le plan muni d'un repère orthonormé de (O, I, J).

1. Calcule la limite de f en $+\infty$ puis celle de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.
2. Donne une interprétation graphique de ces résultats.

57 On considère la fonction f définie de $[-5 ; 5]$ vers $[-517 ; 3]$ par : $f(x) = (x - 3)^3 - 5$.

1. Démontre que f est une bijection de $[-5 ; 5]$ vers un intervalle à déterminer.
2. a) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-5 ; 5]$.
   b) Justifie que : $4{,}7 < \alpha < 4{,}71$.
3. Démontre que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-5 ; 5]$.

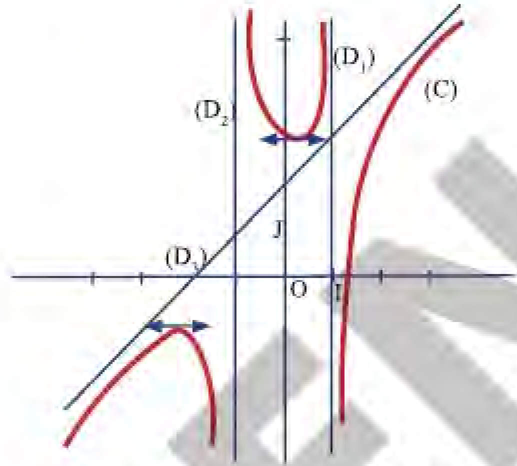
58 Le plan est muni d'un repère (O, I, J) . On note (C) la courbe représentative de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 2x + 5}{x^2 + 5}$

Démontre que la droite d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à (C) .

59 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

On donne ci-contre la courbe représentative (C) d'une fonction f et les droites (D_1), (D_2), (D_3) d'équations respectives : $(D_1) : x = +1$; $(D_2) : x = -1$; $(D_3) : y = x + 2$.

1. En utilisant le graphique, traduis en terme de limite chacun des énoncés suivants:
   - (D_1) est asymptote à (C) ;
   - (D_2) est asymptote à (C) ;
   - (D_3) est asymptote à (C).
2. Étudie en utilisant le graphique, le signe de $f(x) - (x + 2)$ sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.



60 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J).

f est une fonction de $]-5 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 5}$.

1. Étudie les variations de la fonction f.
2. Démontre que f réalise une bijection de l'intervalle $]-5 ; +\infty[$ vers un intervalle K à déterminer.
3. Détermine l'expression de la bijection réciproque f^{-1}.
4. Justifie que la droite d'équation $x = -5$ est une asymptote verticale à la courbe (C) de f.
5. Justifie que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) de f.

SITUATION COMPLEXE

61 Lors d'une expérience, les élèves de terminale étudient le refroidissement d'un objet porté à 210°C.

On note $f(t)$ la température de l'objet à l'instant t. t est exprimé en minutes et $f(t)$ en degrés Celsius (°C). L'étude du phénomène physique conduit à la formule :

$$f(t)=\frac{210}{t}+10.$$

Les élèves effectuent un contrôle de la température de l'objet après chaque minute (le premier contrôle ayant lieu à l'instant t = 1, ce jeudi 08 avril 2021 à 08 h)

Deux élèves, Abou et Konan émettent deux hypothèses.

Pour Abou, la température de l'objet passera en dessous de 11° avant le vendredi 09 avril 2021 à 08 h.

Pour Konan, la température atteindra 10° au bout d'une très longue période.

Ayant écouté ces deux élèves, tu décides de vérifier chacune de ces hypothèses.

À l'aide d'une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques, donne ton avis sur chacune de ces hypothèses.

62 Une entreprise est spécialisée dans la fabrication de pièces métalliques circulaires.

Elle vient de recevoir une commande de plusieurs pièces circulaires ayant chacune les trois caractéristiques décrites comme suit (voir figure) :

1. OE = 1 ;
2. $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OE}\,;\,\overrightarrow{OF}}\right)=\alpha\,;\left(\alpha\in\left]0\,;\pi\right[\right)$;
3. L'aire du triangle OEF doit être égale à l'aire comprise entre le segment [EF] et l'arc $\overset{\frown}{EF}$.

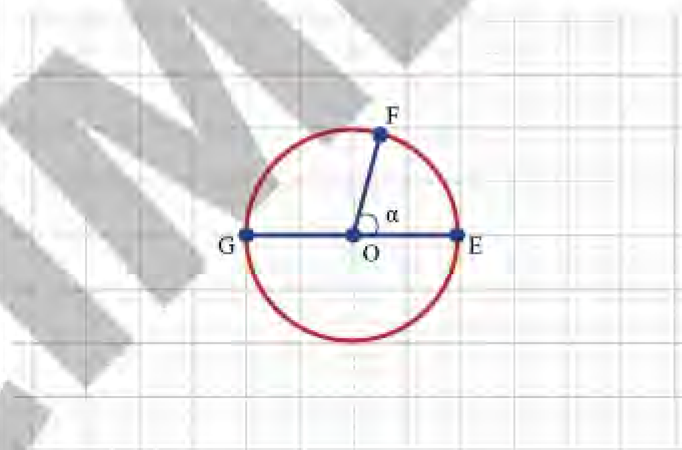
Sur la figure ci-dessous, les points E et F appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

L'entrepreneur a réalisé une pièce métallique et a placé le point E tel que : OE = 1.

Par contre, il ne sait pas comment déterminer le nombre réel α pour placer le point F sur le cercle afin que les conditions 2 et 3 soient réalisées.

Tu es invité à répondre à la préoccupation de l'entrepreneur.

À l'aide d'une production argumentée utilisant tes connaissances mathématiques, détermine pour cet entrepreneur une valeur approchée en degré de α, afin de lui permettre d'honorer la commande de son client.



2 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALÉATOIRE

Commentaire de la Leçon

Le terme probabilité a été utilisé au moyen âge. Il est issu du latin « probare » qui signifie « prouver » ainsi, le calcul des probabilités est une « science dont le but est de déterminer la vraisemblance d'un évènement ».

En première, ont été introduit les rudiments du dénombrement et de la probabilité, il s'agira en terminale de poursuivre et d'approfondir l'étude des phénomènes aléatoires, d'introduire la notion de probabilité conditionnelle et celle de variable aléatoire. Il est souhaitable de modéliser le plus souvent la notion de probabilité conditionnelle à l'aide des arbres de choix ou des tableaux à double entrée. On fera remarquer aux élèves qu'une variable aléatoire est en réalité une fonction. L'enseignant insistera sur la façon de reconnaitre une situation où la loi binomiale doit être appliquée (épreuves répétées identiques et indépendantes)

Dans l'enseignement supérieur, la probabilité est basée sur la théorie de la mesure et celle de l'intégration. Les probabilités sont utilisées dans plusieurs domaines notamment dans les jeux de hasard, en physique, en médecine, en statistique, en génétique, en informatique et en biologie moléculaire.

Habiletés et Contenus

- ✓ **Connaître** la définition d'une probabilité ; conditionnelle, la définition d'une variable aléatoire ; la définition d'une loi de probabilité ; la définition d'une fonction de répartition; la définition de l'espérance mathématique ; de la variance et de l'écart-type ; un système complet d'évènement ; la définition d'une épreuve de Bernoulli ; la définition d'un schéma de Bernoulli ; la définition de la loi binomiale de paramètres n et p ; la propriété relative à l'espérance mathématique d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n,p)$; la propriété relative à la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n,p)$; la formule des probabilités totales.
- ✓ **Noter** une probabilité conditionnelle : $P(A/B)$ ou $P_B(A)$.
- ✓ **Calculer** la probabilité d'un évènement ; la probabilité d'un évènement en utilisant la formule des probabilités totales ; la probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli ($0 \leq k \leq n$) ; l'espérance mathématique ; la variance et l'écart type d'une variable aléatoire donnée.
- ✓ **Justifier** que deux événements sont indépendants ou non.
- ✓ **Déterminer** la loi de probabilité d'une variable aléatoire donnée ; la fonction de répartition d'une variable aléatoire donnée.
- ✓ **Construire** un arbre pondéré ; la fonction de répartition d'une variable aléatoire donnée.
- ✓ **Traiter une situation** faisant appel aux probabilités.

Situation d'Apprentissage

Le père d'un élève de terminale lui dit : « J'augmenterai ton argent de poche si tu gagnes au moins deux parties consécutives sur trois que tu joueras contre ta mère et moi en changeant d'adversaire à chaque partie. Tu as une chance sur 3 de gagner lorsque tu joues avec ta mère et 5 chances sur 9 lorsque tu joues avec moi».

L'élève qui veut voir son argent de poche augmenter dit à son père qu'il va y réfléchir. Arrivé en classe le lendemain, il explique à ses amis de classe ce que son père lui a dit. Ils se mettent à faire des calculs pour savoir s'il est probable qu'il gagne, sachant qu'il commence le jeu avec son père.

Activité 1 Définition, conséquence d'une probabilité conditionnelle

Dans une classe de terminale de 36 élèves, 18 élèves ont 17 ans, 24 élèves sont des filles et 14 filles ont 17 ans.

On choisit au hasard un élève de cette classe, on s'intéresse aux événements suivants : A : « l'élève est une fille » ; B: « l'élève a 17 ans » et $A \cap B$: « l'élève est une fille de 17 ans ».

1. Détermine l'univers Ω de cette expérience aléatoire. Donne son cardinal.
2. Calcule : a) $P(B)$; b) $P(A)$; c) $P(A \cap B)$.
3. Dans cette question, on suppose qu'on sait que l'élève choisi est une fille.

   a) Détermine l'univers. Est-il le même que dans la question 1 ?

   b) Calcule alors la probabilité p de l'événement : « l'élève a 17 ans sachant que c'est une fille ».

   c) Compare p et $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Récapitulons

P est la probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé.

On la note $P_A(B)$ ou $P(B/A)$.

Ainsi $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (si $P(A) \neq 0$).

Exercice de fixation

1 Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules blanches.

On tire successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

On considère les évènements suivants :

A : « Tirer une boule rouge en premier » et

B : « Tirer une boule rouge en second ».

1. Calcule $P(A)$ et $P_A(B)$.
2. Déduis-en $P(A \cap B)$.

2 Expérience aléatoire $\sum_1$.

Un sac contient 50 boules, dont 20 boules rouges et 30 boules noires.

Sur chaque boule, est marqué soit "Gagné" ou soit "Perdu".

Sur 15 boules rouges, il est marqué Gagné. Sur 9 boules noires, il est marqué Gagné.

On tire au hasard une boule dans le sac.

Soit R l'événement "On tire une boule rouge".

Soit G l'événement "On tire une boule marquée Gagné".

On donne : $P(R) = 0,4$ et $P(R \cap G) = 0,3$.

Calcule $P_R(G)$.

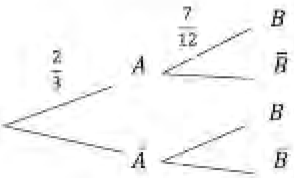
Activité 2 Arbre pondéré

Dans une classe de terminale de 36 élèves,

On considère les événements suivants :

A : « l'élève est une fille » ; B: « l'élève a 17 ans ».

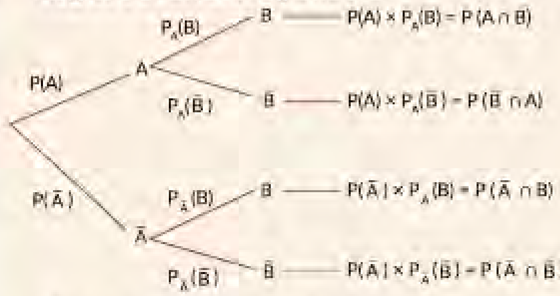
On donne : $P(A) = \frac{2}{3}$; $P_A(B) = \frac{7}{12}$ et $P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{3}$.



1. Complète l'arbre pondéré suivant en écrivant sur les différentes branches les probabilités correspondantes.
2. Donne les règles que tu as utilisées pour la construction de l'arbre pondéré.

Récapitulons

- Cet arbre est appelé arbre de probabilité ou arbre pondéré.
- Il aide à mieux comprendre et calculer les probabilités conditionnelles.
- **Règles sur un arbre pondéré**



✓ La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.

✓ La probabilité d'un évènement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités portées par les branches de ce chemin.

✓ La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à sa réalisation.

Exercices de fixation

3 Dans un lycée, il y a 867 élèves répartis comme suit :

	Seconde	Première	Terminale	Total
Filles	203	116	161	480
Garçons	140	134	113	387
Total	343	250	274	867

On choisit un élève au hasard et on note :

F : « l'élève choisi est une fille » ;

G : « l'élève choisi est une garçon » ;

S : « l'élève choisi est un élève de seconde » ;

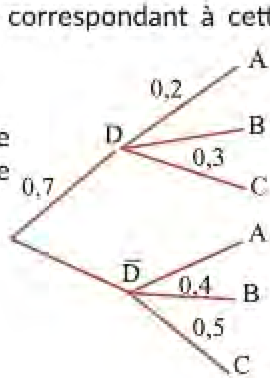
P : « l'élève choisi est un élève de première ;

T : « l'élève choisi est un élève de terminale ».

Construis un arbre pondéré correspondant à cette situation.

4 Arbre pondéré.

1. Complète l'arbre ci-contre pour qu'il soit un arbre pondéré.
2. Détermine $P_D(A)$
3. Calcule $P(D \cap B)$.



5 Expérience aléatoire Σ_2.

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test);
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,99 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note : V l'événement « la personne est contaminée par le virus »

On note : T l'événement « le test est positif »

Construis l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

Activité 3 Formule de probabilités totales

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

A_1 ; A_2 ; A_3 ; ... ; A_n sont des évènements de probabilité non nulle, tels que :

$A_k \cap A_{k'} = \varnothing$ et $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n$.

(On dit que A_1 ; A_2 ; A_3 ; ... ; A_n forme une partition de Ω).

1. Justifie que, pour tout évènement B, on a : $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup ... \cup (B \cap A_n)$.
2. a) Démontre que : $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n)$.
   b) Déduis-en que : $P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + ... + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$.

Récapitulons

Soit A_1 ; A_2 ; A_3 ; .... ; A_n des évènements de probabilité non nulle formant une partition de l'univers Ω. Alors pour tout évènement B :

- $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n)$.
- $P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + ... + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$.

Exercices de fixation

6 En reprenant l'expérience aléatoire $\sum_1$, calcule P(G).

7 En reprenant l'expérience aléatoire $\sum_2$, calcule la probabilité que le test soit positif.

Activité 4 Définition de deux événements indépendants

On lance deux fois une pièce de monnaie non truquée.

Soit A l'événement « obtenir face au premier lancer » et B l'événement « obtenir face au second lancer ».

1. a) Écris en extension l'univers Ω de cette expérience aléatoire.
   b) Écris en extension l'ensemble A ; l'ensemble B puis l'ensemble $A \cap B$.
2. a) Calcule la probabilité des événements suivants :A ; B et $A \cap B$.
   b) Justifie que : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Récapitulons

On a : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Les évènements A et B sont appelés événement indépendants.

Exercices de fixation

8 A et B sont deux évènements de l'univers d'une expérience aléatoire.

Dans chaque cas, écris dans ton cahier le numéro de l'affirmation suivi de vrai si les évènements A et B sont indépendants ou de faux dans le cas contraire.

1. $P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}08$; $P(A \cap B) = 0{,}36$.
2. $P(A) = \frac{40}{60}$; $P(B) = \frac{36}{60}$; $P(A \cap B) = \frac{24}{60}$.
3. $P(A) = \frac{1}{5}$; $P(B) = \frac{11}{15}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{15}$.
4. $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}6$; $P(A \cap B) = 0{,}3$.

9 Dans le lancer d'un dé parfait, on considère les évènements suivants :

A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir un multiple de trois ».

Justifie que les évènements A et B sont indépendants.

Activité 5 Propriété de deux évènements indépendants

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle.

1. a) Exprime $P(A \cap B)$ en utilisant $P_A(B)$.
   b) Traduis que les évènements A et B sont indépendants.
   c) Déduis de ce qui précède que si A et B sont indépendants alors $P_A(B) = P(B)$.
2. Démontre que si $P_A(B) = P(B)$, alors A et B sont indépendants.

Récapitulons

- Soit A et B deux évènements de probabilité non nulle.
- A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Exercice de fixation

10 Recopie et réponds par vrai ou par faux.

1. Deux évènements qui ont une chance de réalisation sont indépendants si la réalisation de l'un n'influence pas celle de l'autre. ......
2. Deux évènements incompatibles peuvent être indépendants. ......

Activité 6 Propriété et conséquence de deux évènements indépendants

Soit A et B deux événements indépendants.

1. a) En appliquant la formule des probabilités totales avec $\{B; \overline{B}\}$, justifie que : $P(A) = P(A)\left(P(B) + P_A(\overline{B})\right)$.
   b) Déduis de la question 1.a) que : $P_A(\overline{B}) = P(\overline{B})$ si $P(A) \neq 0$.
2. Démontre que A et $\overline{B}$ sont indépendants.
3. Démontre que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Récapitulons

- Si deux évènements A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.
- Si deux événements A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercices de fixation

11 A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire, tels que :

$P(A) = 0{,}7$; $P(\overline{B}) = 0{,}4$ et $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}28$.

Justifie que les évènements A et B sont indépendants.

12 Soit A et B deux événements indépendants tels que $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$.

Détermine $P(A)$ et $P(A \cup B)$.

13 Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication, peuvent apparaître deux défauts désignés par les lettres α et β.

20 % des montres fabriquées présentent le défaut α et 10 % le défaut β.

Une montre est tirée au hasard dans la production. On considère les événements suivants :

A : « la montre tirée présente le défaut α »

B : « la montre tirée présente le défaut β »

C : « la montre tirée ne présente aucun défaut »

On suppose que A et B sont indépendants. Calcule la probabilité de l'événement C.

Activité 7 Définition d'une variable aléatoire

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.

On gagne 10 F pour chaque résultat « pile » et on perd 5 F pour chaque résultat « face ».

1. a) Détermine l'univers Ω de cette expérience aléatoire.
   b) Détermine le cardinal de Ω.
2. On considère l'application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, qui à chaque éventualité associe le gain correspondant.
   Justifie que les gains possibles sont : -15 ; 0 ; 15 et 30.

Récapitulons

- Les nombres réels -15 ; 0 ; 15 et 30 sont les valeurs prises par l'application X.
- L'application X est appelée une variable aléatoire réelle.

Exercice de fixation

14 Réarrange dans ton cahier les groupes de mots ci-dessous pour obtenir une proposition vraie.

toute application / on considère / de Ω dans $\mathbb{R}$ / une expérience aléatoire / d'univers Ω / on appelle variable aléatoire /

15 On lance une seule fois une pièce de monnaie à pile (P) ou face (F) et on note la face supérieure. Soit Ω l'univers des possibles.

Réponds par vrai par ou par faux si la relation X est une variable aléatoire.

N°	Relation	Vrai / Faux
1	X est la relation de Ω dans $\mathbb{R}$, telle que $X(P) = 2$ et $X(F) = -6$.	
2	X est la relation de Ω dans $\mathbb{R}$, telle que : $X(P) = 2$ et F n'a pas d'image par X.	
3	X est la relation de Ω dans $\mathbb{R}$, telle que $X(P) = \frac{1}{2}$ et $X(F) = \frac{1}{2}$.	

Activité 8 Notation et vocabulaire

On reprend l'énoncé de l'activité 7.

1. a) Écris en extension l'événement $(X = +15)$.
   b) Écris en extension l'événement $(X = -15)$.
2. a) Écris en extension l'événement $(X = 0)$.
   b) Écris en extension l'événement $(X \geq +15)$.
3. Écris en extension l'événement $(X = +30)$.

Récapitulons

X est une variable aléatoire et a un nombre réel.

- $(X = a)$ est l'événement $\{\omega \in \Omega$, tel que $X(\omega) = \alpha\}$. On dit que X prend la valeur a.
- $(X \geq a)$ est l'événement $\{\omega \in \Omega$, tel que $X(\omega) \geq \alpha\}$. On dit que X prend une valeur supérieure ou égale à a.

Exercice de fixation

16 On lance un dé cubique équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre apparu sur la face supérieure.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur 1 si le nombre lu est pair, −2 si le nombre lu est 5 et 0 sinon.

Écris en extension chacun des évènements suivants :

a) (X = 1) ; b) (X = 0) ; c) (X < 1) ; d) (X ≥ 2).

Activité 9 Définition de la loi de probabilité d'une variable aléatoire

On reprend l'énoncé de l'activité 7.

1. Soit Ω l'univers de l'expérience de l'activité 7, détermine l'ensemble X(Ω) des valeurs prises par X.
2. Justifie que la probabilité de l'événement (X = +15) est : $\frac{3}{8}$.
3. Détermine les probabilités de chacun des événements suivants : (X = −15) ; (X = 0) ; (X = +15) et (X = +30).
4. Justifie que l'application qui à chaque valeur prise x par X associe la probabilité de l'événement (X = x) est une probabilité sur X(Ω).

Récapitulons

- A chaque valeur prise par la variable aléatoire X, on associe la probabilité correspondante.
- X (Ω) = {−15 ;0 ;15 ;30} est appelé l'univers image de la variable aléatoire X.
- La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	−15	0	15	30	Total
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Exercices de fixation

17 Une urne contient 5 boules dont 2 noires et 3 rouges. On tire simultanément deux boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées.

1. Détermine les valeurs prises par X.
2. Détermine la loi de probabilité de X.

18 On lance un dé cubique à six (6) faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre apparu sur la face supérieure.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur 1 si le nombre lu est pair, −2 si le nombre lu est 5 et 0 sinon.

Détermine la loi de probabilité de X.

Activité 10 Espérance mathématique d'une variable aléatoire

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	−15	0	15	30	Total
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

1. Calcule : $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4$.
2. Justifie que $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4$ est la moyenne des valeurs prises par X.

Récapitulons

$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4$ est la moyenne de X.
On note : $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4$.
E(X) est appelé l'espérance mathématique de X.

Exercices de fixation

19 Une urne contient 5 boules dont 2 noires et 3 rouges. On tire simultanément 2 boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	0	1	2
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

1. Calcule l'espérance mathématique E(X) de X.
2. Interprète l'espérance mathématique E(X) de X.

20 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	−2	1	6	9	10	14
$P(X = x_i)$	0,1	0,5	0,07	0,06	0,08	0,19

Calcule l'espérance mathématique de X.

Activité 11 Variance et écart-type d'une variable aléatoire

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	−15	0	15	30	Total
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

L'espérance mathématique, E(X), de X est égale à $\frac{15}{2}$.

1. Calcule :
   a) $V(X) = (x_1 - E(X))^2\, p_1 + (x_2 - E(X))^2\, p_2 + (x_3 - E(X))^2\, p_3 + (x_4 - E(X))^2\, p_4$.
   b) $W(X) = (p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + p_3x_3^2 + p_4x_4^2) - (E(X))^2$.
   c) Compare V(X) et W(X).
2. Calcule : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$.

Récapitulons

- Le nombre réel positif V(X) tel que :
  $V(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2\, p_2 + (x_3 - E(X))^2\, p_3 + (x_4 - E(X))^2\, p_4$ est appelé la variance de X.
- Le nombre réel positif σ(X) tel que $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$ est appelé l'écart-type de X.

Exercice de fixation

21 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	−2	1	6	9	10	14
$P(X = x_i)$	0,1	0,5	0,07	0,06	0,08	0,19

E(X) = 4,72.

Calcule V(X) et σ(X).

22 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{23}{66}$	$\frac{5}{22}$	$\frac{5}{33}$

1. Justifie que : E(X) = 0,17.
2. a) Démontre que : V(X) = 1,35.

   b) Déduis-en la valeur de l'écart type de X.

Activité 12 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Soit une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	-1	0	1	3
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Soit la fonction F définie par : $F(x) = P(X \leq x)$.

1. Recopie et complète les pointillés par le nombre qui convient:

   Si $x < -1$, $F(x) = 0$

   Si $-1 \leq x < 0$, $F(x) = \cdots + \cdots = \cdots$

   Si $0 \leq x < 1$, $F(x) = \cdots + \cdots + \cdots = \cdots$

   Si $1 \leq x < 3$, $F(x) = \cdots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots$

   Si $3 \leq x$, $F(x) = \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots$
2. Représente graphiquement la fonction F.

Récapitulons

La fonction F est définie de ℝ vers [0;1] par : $F(x) = P(X \leq x)$.

La fonction F est appelée fonction de répartition de la variable aléatoire X.

La fonction F est une fonction constante par intervalles et sa représentation graphique est en escalier.

Exercices de fixation

23 Détermine et représente graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	-1	1	2	3
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

24 On considère le lancer de 3 pièces de monnaie. On définit la variable aléatoire X prenant pour valeurs le nombre de piles obtenues à l'issue des trois lancées.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$				

Détermine et représente la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

Activité 13 Épreuve de Bernoulli –Schéma de Bernoulli

1. On lance une pièce de monnaie équilibrée et on note le résultat obtenu. Détermine le nombre de possibilités.
2. Justifie que l'expérience qui consiste à lancer trois fois de suite cette pièce de monnaie équilibrée est une épreuve de la même nature que celle définie au 1. répétées trois fois de façon indépendante.

Récapitulons

- Une expérience qui n'a que deux résultats possibles (l'un qualifié de succès et l'autre d'échec) est appelée « une épreuve de Bernoulli ».
- Une épreuve de Bernoulli répétée de façon indépendante n fois ($n \geq 2$), est un schéma de Bernoulli.

Exercices de fixation

25 Réponds par vrai si cette expérience est une épreuve de Bernoulli ou par faux si cette épreuve n'est pas une épreuve de Bernoulli.

1	On tire une boule dans une urne contenant 7 boules blanches et 3 boules rouges et on s'intéresse à chaque fois, à la sortie d'une boule blanche.
2	On lance un dé parfaitement équilibré et on s'intéresse à l'apparition du chiffre 6.
3	Tirer une flèche à l'arc sur une cible.
4	Avoir un nombre pair dans le lancer d'un dé parfait à 6 faces numérotées de 1 à 6.

26 Un lycée possède 50 ordinateurs. La probabilité qu'un ordinateur tombe en panne est de 0,01. On suppose que le fonctionnement d'un ordinateur est indépendant des autres.

Justifie que l'expérience qui consiste à choisir 3 ordinateurs successivement parmi les 50 ordinateurs est un schéma de Bernoulli.

27 À la roulette, la probabilité que la boule tombe sur rouge est de $\frac{18}{37}$.

On gagne à la roulette si la boule tombe sur le rouge et on perd sinon.

Un participant joue 20 fois successivement à la roulette.

Justifie que l'expérience qui consiste à jouer 20 fois à la roulette est un schéma de Bernoulli.

Activité 14 Loi binomiale

À la roulette, la probabilité que la boule tombe sur rouge est de $\frac{18}{37}$.

On gagne à la roulette si la boule tombe sur le rouge et on perd sinon.

Un participant joue 3 fois successivement à la roulette. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de parties gagnées.

1. Détermine le nombre de parties qu'un participant peut gagner.
2. a) Détermine la probabilité p qu'il gagne exactement 2 fois à la roulette.

   b) Calcule : $p' = C_2^2 \times \left(\frac{18}{37}\right)^2 \times \left(\frac{19}{37}\right)^1$.

   c) Compare p et p'.
3. Détermine P(X = 0), P(X = 1) et P(X = 3).

Récapitulons

Soit la variable aléatoire X égale au nombre de succès dans n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p.

On admet que :

- La variable aléatoire X prend les valeurs $0,1,2,\ldots,n$.

($X(\Omega) = \{0,1,2,\ldots,n\}$: « Nombre de succès »).

- La variable aléatoire X prenant pour valeur le nombre de succès dans n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p suit une loi binomiale de paramètres n et p. Elle est notée $B(n,p)$.
- La probabilité d'obtenir k fois le succès est donnée par : $P(X=k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

Exercices de fixation

28 On choisit par hasard un élève d'un lycée et on lui demande de répondre par "Oui" ou "Non", s'il va au moins une fois par mois à la bibliothèque du lycée. Une étude statistique a montré que la probabilité que l'élève réponde "Oui" est $\frac{9}{11}$. On répète 10 fois, de façon indépendante, le choix au hasard d'un élève de ce lycée.

Calcule la probabilité que, parmi les élèves choisis, 6 élèves exactement se rendent au moins une fois par mois à la bibliothèque.

29 À chaque tir, la probabilité qu'un tireur touche une cible est 0,7. Un tireur tir trois fois de suite. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de cibles atteintes.

Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.

Activité 15 Espérance mathématique et variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale

A la roulette, la probabilité que la boule tombe sur rouge est de $\frac{18}{37}$.

On gagne à la roulette si la boule tombe sur le rouge et on perd sinon.

Un participant joue 3 fois successivement à la roulette. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de parties gagnées.

1. Détermine la loi de probabilité de X.
2. a) Calcule l'espérance mathématique E(X).

   b) Compare E(X) avec E' où $E' = 3 \times \frac{18}{37}$.
3. a) Calcule la variance V(X).

   b) Compare V(X) avec V' où $V' = 3 \times \frac{18}{37} \times (1 - \frac{18}{37})$.

Récapitulons

Lorsque X suit une loi binomiale de paramètres n et p , on admet que :

- L'espérance mathématique de X est : $E(X) = np$.
- La variance de X est : $V(X) = np(1-p)$.

Exercices de fixation

30 En reprenant l'énoncé de l'exercice précédent,

1. Calcule l'espérance de X.
2. Calcule la variance de X.
3. Calcule l'écart-type de la variable aléatoire X.

31 Un questionnaire à choix multiple (QCM) comporte 10 questions. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées, dont une seule est correcte. Un élève répond au hasard à chaque question du QCM. On note X le nombre de réponses correctes à l'issue du questionnaire. On suppose que les réponses aux questions sont indépendantes les unes des autres.

1. Explique pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre 10 et $\frac{1}{q}$.
2. Détermine l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.

I. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

a) Probabilité conditionnelle

Définition

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω.
Soit A un événement de Ω de probabilité non nulle et B un événement de Ω.
On appelle probabilité de B sachant A, ou probabilité de B si A, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé.

La probabilité de B sachant A est notée $P_A(B)$ ou P(B/A) et est définie par : $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

Conséquence

Soit A et B deux événements où P(A) ≠ 0.
On a : $P(A\cap B) = P_A(B)\times P(A)$.

Remarques

L'application P_A de $p(\Omega)$ dans l'intervalle [0 ; 1] qui à tout B associe $P_A(B)$ est une probabilité sur Ω.

Exemple

Dans un lycée, il y a 867 élèves répartis comme suit :

	Seconde	Première	Terminale	Total
Filles	203	116	161	480
Garçons	140	134	113	387
Total	343	250	274	867

On choisit un élève au hasard. On note :
F : « l'élève choisi est une fille » ;
T : « l'élève choisi est un élève de terminale ».
Calculons la probabilité que l'élève choisit soit un élève de terminale sachant que c'est une fille.

Cette probabilité est $P_F(T)$. On a : $P_F(T)=\dfrac{P(F\cap T)}{P(F)}$.

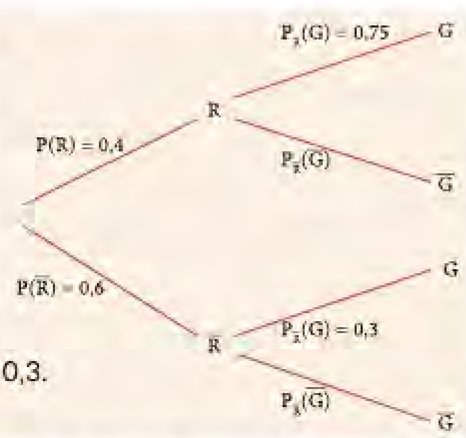
$P(F\cap T)=\dfrac{161}{867}$; $P(F)=\dfrac{480}{867}$; D'où : $P_F(T)=\dfrac{161}{480}$.

Pour s'entraîner : Exercice 1

b) Arbre pondéré

Un sac contient 50 boules, dont 20 boules rouges et 30 boules noires.
Sur chaque boule, est marqué soit "Gagné" ou soit "Perdu".
Sur 15 boules rouges, il est marqué Gagné. Sur 9 boules noires, il est marqué Gagné.
On tire au hasard une boule dans le sac.
Soit R l'événement "On tire une boule rouge".
Soit G l'événement "On tire une boule marquée Gagné".
Donc l'événement R∩G est : "On tire une boule rouge marquée Gagné".
L'expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré (ou arbre de probabilité) dont voici un exemple :

$p(R\cap G) = p(R)\times P_R(G) = 0{,}4\times 0{,}75 = 0{,}3$.

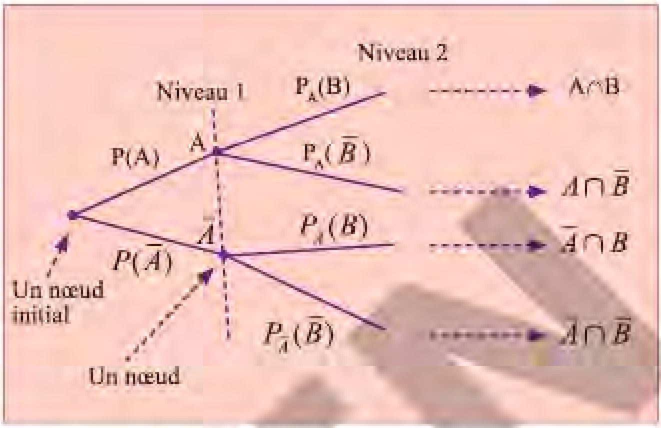


Règles sur les arbres pondérés

1. À l'origine de l'arbre ou nœud initial, on a l'événement certain, c'est-à-dire l'univers Ω.
2. À partir d'un nœud de l'arbre, on dessine des branches. Dans l'arbre ci-dessous, deux branches partent de Ω vers les évènements A et $\overline{A}$. Dans le cas général, on décompose Ω en n évènements deux à deux incompatibles $A_1, \dots, A_n$ dont la réunion est Ω. On recommence le processus à chaque niveau.
3. Au niveau 1, on place sur chaque branche la probabilité de l'événement se trouvant au bout de la branche. Au niveau 2, sur une branche allant d'un évènement B, on place $P_A(B)$ qui est la probabilité de l'événement B, sachant que l'événement A est réalisé. Il en est de même à tous les autres niveaux.
4. La somme des probabilités inscrites sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.

5. Une succession de plusieurs branches s'appelle un chemin. Un chemin représente l'intersection des différents évènements rencontrés le long de ce chemin. La probabilité d'un chemin est alors le produit des probabilités des évènements rencontrés le long de ce chemin.

6. La probabilité d'un évènement associé à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de chacun de ces chemins.

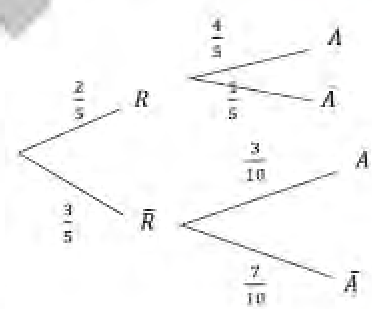


Exemple d'application

Suite à l'envoi de bons de réduction sur son site internet, le service marketing d'un magasin du e-commerce effectue une enquête sur ses clients.
Cette enquête a montré que :
40 % des clients possédaient un bon de réduction ;

80 % des clients munis d'un bon de réduction ont acheté un article en ligne ;
30 % des clients ne possédant pas de bon de réduction ont acheté un article en ligne.
On interroge un client au hasard.
On considère les évènements suivants :
R : « Le client avait un bon de réduction »
A : « Le client a acheté un article en ligne »

1. a) Donne P(R) ; $P_R(A)$ et $P_{\bar{R}}(A)$.
   b) Traduis la situation par un arbre pondéré.
2. Détermine $P_R(\bar{A})$ puis P(A).



1. On a : $P(R) = \frac{2}{5}$; $P_R(A) = \frac{4}{5}$ $P_{\bar{R}}(A) = \frac{3}{10}$
Traduisons la situation par un arbre pondéré.
2. On a : $P_R(\bar{A}) = 1 - P_R(A) = \frac{1}{5}$; $P_{\bar{R}}(\bar{A}) = 1 - P_{\bar{R}}(A) = \frac{7}{10}$

$P(R \cap A) = P(R) \times P_R(A) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{25}$

La probabilité qu'un client achète un article en ligne est P(A)
$P(A) = P(R) \times P_R(A) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(A) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$.

Pour s'entraîner : Exercices 2 ; 3 ; 7

c) Formule des probabilités totales

Propriété

Soit $A_1, \dots, A_n$, n évènements deux à deux incompatibles tels que la probabilité de chaque évènement A_i soit non nulle et dont la réunion est égale à Ω.
Pour tout évènement B, on a : $P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$.

Exemple d'application

Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'achat d'un client potentiel d'un téléviseur et d'un magnétoscope. La probabilité qu'il achète un téléviseur est de 0,6.
La probabilité qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est de 0,4.
La probabilité qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté de téléviseur est de 0,2.
On se propose de calculer la probabilité que le client achète un magnétoscope.

Soit les évènements suivants :
T : « Le client achète un téléviseur » ;
M : « Le client achète un magnétoscope ».
D'après l'énoncé, on a : $P(T) = 0{,}6$; $P(M/T) = 0{,}4$; $P(M/\overline{T}) = 0{,}2$.
En appliquant la formule des probabilités totales avec $\{T ; \overline{T}\}$, on a :
$P(M) = P(T \cap M) + P(\overline{T} \cap M)$.
$P(M) = P(T) \times P(M/T) + P(\overline{T}) \times P(M/\overline{T})$.
$P(\overline{T}) = 0{,}4$ car $P(\overline{T}) = 1 - P(T)$ et $P(T) = 0{,}4$.
D'où : $P(M) = 0{,}32$.

Pour s'entraîner : Exercices 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

b) Évènements indépendants

Définition

Deux événements A et B d'un univers Ω sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Exemple

A et B sont deux évènements de l'univers d'une expérience aléatoire, tels que :
1. $P(A) = 0{,}2$; $P(A \cap B) = 0{,}08$ et $P(B) = 0{,}38$;
2. $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cap B) = 0{,}3$.

Dans le deuxième cas, les événements A et B sont indépendants car $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Dans le premier cas, les événements A et B ne sont pas indépendants car $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$.

Pour s'entraîner : Exercices 8 ; 9 ; 10

Propriété

Soit A et B deux évènements de probabilité non nulle.
A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.
A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.

Remarques

Cette propriété illustre la notion d'événements indépendants. En effet, A et B sont indépendants si et seulement si la probabilité de B sachant A est égale à la probabilité de B. Cesci équivaut à dire que la réalisation ou la non réalisation de l'événement A n'a pas d'influence sur la probabilité de l'événement B et vice versa.

Exemple d'application

Une urne contient 2 boules noires et 8 blanches.
On tire deux boules de cette urne. On note A et B les événements suivants :
A : « la première boule tirée est noire. »
B : « la deuxième boule tirée est noire. »

- Si le tirage de ces deux boules s'effectue successivement avec remise de la boule tirée dans l'urne, la probabilité de B est $\frac{2}{10}$ et ceci, quelle que soit la couleur de la boule tirée en premier. Dans cette situation, les événements A et B sont indépendants.

- Si le tirage de ces deux boules s'effectue successivement sans remise de la boule dans l'urne, la probabilité de B est $\frac{2}{9}$ si la première boule tirée est blanche et $\frac{1}{9}$ si la première boule tirée est noire. La probabilité de B varie en fonction de la réalisation ou non de l'événement A. Dans cette situation les événements A et B ne sont pas indépendants.

Pour s'entraîner : Exercice 8

Propriété

Si deux événements A et B sont indépendants, alors les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exemple

A et B sont deux évènements d'une expérience aléatoire, tels que :
$P(A) = 0,7$; $P(\overline{B}) = 0,4$ et $P(A \cap \overline{B}) = 0,28$. Justifions que A et B sont indépendants.
On a : $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B})$. Par suite A et $\overline{B}$ sont indépendants et donc A et B le sont.

Conséquence

Si deux événements A et B sont indépendants, alors les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exemple

Chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux événements indépendants :
- R : « Il n'entend pas son réveil sonner » ;
- S: « Son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».

Il a observé que, chaque jour de classe, la probabilité de R est égale à 0, 1 et que celle de S est égale à 0, 05. Lorsqu'au moins l'un des deux événements se produit, Stéphane est en retard au lycée, sinon il est à l'heure. On se propose de :
- calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.
- calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.

- La probabilité demandée est $P(\overline{R} \cap S)$. Puisque les événements R et S sont indépendants, il en est de même des événements $\overline{R}$ et S.
Donc $P(\overline{R} \cap S) = P(\overline{R}) \times P(S) = (1 - 0,1) \times 0,05 = 0,045$. La probabilité que Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne est 0,045.
- Stéphane arrive à l'heure si et seulement si il entend son réveil sonner et son scooter ne tombe pas en panne. La probabilité demandée est donc $P(\overline{R} \cap \overline{S})$. Puisque les événements R et S sont indépendants, il en est de même des événements $\overline{R}$ et $\overline{S}$.
Donc $P(\overline{R} \cap \overline{S}) = P(\overline{R}) \times P(\overline{R}) = 0,9 \times 0,95$.
On en déduit que $P(\overline{R} \cap \overline{S}) = 0,855$. La probabilité que Stéphane soit à l'heure un jour de classe donné est 0, 855.

Pour s'entraîner : Exercice 50

II. VARIABLE ALÉATOIRE

a) Variable aléatoire

Définition

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω. On appelle variable aléatoire toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Exemple

Une urne contient 2 boules oranges ; 3 boules blanches et 4 boules vertes.
Si on tire une boule orange, on gagne 100 F.
Si on tire une boule blanche, on perd 100 F.
Si on tire une boule verte, on gagne 200 F.
Soit X la somme obtenue après le tirage simultané de deux boules de l'urne.
Soit Ω l'univers des éventualités, on a : Ω = {OO;OB ;OV ;BB ;BV ;VV }.
À chaque éventualité, on associe un nombre réel.
Exemple : OV → 300 ; BB → −200
Ainsi, X est une variable aléatoire.

Pour s'entraîner : Exercice 13

Notation

Soit X une variable aléatoire et a un nombre réel.
$(X = a)$ est l'événement $\{\omega \in \Omega, X(\omega) = a\}$.
On dit que X prend la valeur a.
$(X \leq a)$ est l'événement $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq a\}$. On dit que X prend une valeur inférieur ou égale à a.
$(X > a)$ est l'événement $\{\omega \in \Omega, X(\omega) > a\}$. On dit que X prend une valeur strictement supérieur à a.

Exemple

Avec l'exemple précédent, on a :
$(X = -200)$ est l'événement {BB }.
$(X \leq 200)$ est l'événement { BB ;OB ;BV }.
$(X > 300)$ est l'événement { VV }.

b) Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition

Soit Ω l'univers d'une expériences aléatoire et X une variable aléatoire sur Ω.
Lorsqu'à chaque valeur x_i prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité P_i de l'événement $(X = x_i)$, on défini une probabilité sur Ω appelée la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Remarques

- La donnée de toutes les valeurs x_i prises par X et des probabilités P_i, déterminent entièrement la loi de probabilité de X. Cela se résume dans le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2		p_n

- On a : $p_1 + p_2 + … + p_n = 1$.

Exemple

Au jeu la roulette, les 37 numéros {0,1,2 ,…,36 } sont équiprobables.
De plus, 18 de ces numéros sont rouges.
On mise 100 F sur « rouge » ; on gagne 200 F si un numéro rouge sort, sinon on perd sa mise.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique réalisé.
Déterminons la loi de probabilité de X.
Si le rouge sort on gagne $200 - 100 = 100$.
Si le rouge ne sort pas on gagne $0 - 100 = -100$.
De plus $P(X = 100) = \frac{18}{37}$ et $P(X = -100) = \frac{19}{37}$.
Ainsi, la loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	-100	100
$P_i = (X = x_i)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

Pour s'entraîner : Exercices 11 ; 12 ; 13

c) Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Définition

Soit X la variable aléatoire de loi de probabilité :

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2		p_n

On appelle espérance mathématique ou moyenne de X, le nombre réel noté E(X) défini par :

$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + … + p_nx_n$.

Remarques

E(X) est la moyenne des valeurs x_i , pondérées par les valeurs p_i.

Dans le domaine des jeux, E(X) est le gain moyen que peut espérer un joueur sur un grand nombre de parties. Cela permet de qualifier un jeu.

En effet

- Si E(X) > 0, le jeu est favorable au joueur.
- Si E(X) = 0, le jeu est équitable.
- Si E(X) < 0, le jeu est défavorable au joueur.

Exemple

Au jeu la roulette, les 37 numéros {0, 1, 2, ... ,36 } sont équiprobables.
De plus, 18 de ces numéros sont rouges.
On mise 100 F sur « rouge » ; on gagne 200 si un numéro rouge sort, sinon on perd sa mise.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique réalisé.
On a X(Ω) = {−100 ; 100}.
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	−100	100
$P_i = (X = x_i)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

Calculons son espérance mathématique E(X), puis interprétons E(X).

On a : $E(X) = -100 \times \frac{19}{37} + 200 \times \frac{18}{37} = \frac{-1900 + 1800}{37} = -\frac{100}{37}$.

Donc sur un grand nombre de parties, le joueur perd en moyenne 2,70 F.
De plus, comme E(X) < 0, le jeu est défavorable au joueur.

Pour s'entraîner : Exercices 17 ; 18

d) Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définition

Soit X la variable aléatoire de loi de probabilité :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2		p_n

• On appelle variance de X, le nombre réel positif ou nul noté V(X) défini par :
$V(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + ... + (x_n - E(X))^2 p_n$

• On appelle écart-type de X, le nombre réel positif ou nul noté σ(X) défini par :$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarques

$V(X) = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + ... + p_n x_n^2 - [E(X)]^2$.

Exemple

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	−20	−10	10	20	30
$P_i = (X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

Calculons la variance V(X) et l'écart type σ(X) de la variable aléatoire X

On a : $E(X)=(-20)\times\frac{1}{5}+(-10)\times\frac{3}{10}+(10)\times\frac{1}{6}+(20)\times\frac{1}{12}+30\times\frac{1}{4}$

$E(X)=\frac{23}{3}.$

$V(X)=\left((-20)^2\times\frac{1}{5}+(-10)^2\times\frac{3}{10}+(10)^2\times\frac{1}{6}+(20)^2\times\frac{1}{12}+(30)^2\times\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{23}{6}\right)^2$

V(X)=370,1776.

Par suite, $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=19{,}24$.

Pour s'entraîner : Exercices 19 ; 20 ; 21 ; 22

e) Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X, l'application F, telle que :

$$F:\mathbb{R}\to[0,1]$$
$$t\mapsto F(t)=P(X\le t).$$

Exemple

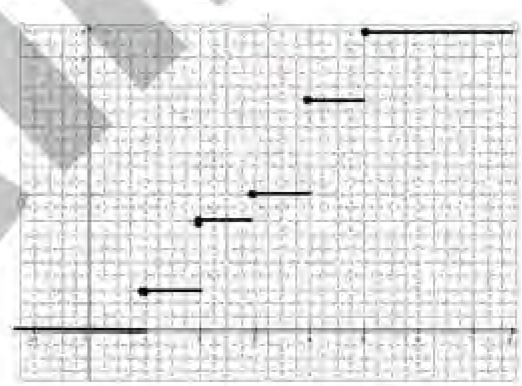
La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est déterminée par le tableau ci-dessous.

x_i	1	2	3	4	5
$P_i=(X=x_i)$	$\frac{2}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{6}{21}$

Déterminons la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

$$\begin{cases} \text{Si } x<1, F(x)=0 \\ \text{Si } 1\le x<2, F(x)=\frac{2}{21} \\ \text{Si } 2\le x<3, F(x)=\frac{2}{21}+\frac{4}{21}=\frac{6}{21} \\ \text{Si } 3\le x<4, F(x)=\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{1}{21}=\frac{7}{21} \\ \text{Si } 4\le x<5, F(x)=\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{1}{21}+\frac{8}{21}=\frac{15}{21} \\ \text{Si } 5\le x, F(x)=\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{1}{21}+\frac{8}{21}+\frac{6}{21}=1 \end{cases}$$

Représentons graphiquement la fonction de répartition F.



Pour s'entraîner : Exercices 14 ; 15 ; 16 ; 28 ; 33 ; 35

Propriété

Si F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X, alors :

- $\forall t\in\mathbb{R}$, $0\le F(t)\le 1$;
- F est croissante sur $\mathbb{R}$.

III. ÉPREUVE DE BERNOULLI ET LOI BINOMIALE

Définition

- Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire comportant deux issues : le succès ou l'échec. La probabilité P de succès est appelée paramètre de l'épreuve de Bernoulli.
- On appelle schéma de Bernoulli, une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Le nombre n des épreuves de Bernoulli et la probabilité P du succès sont appelés paramètres du schéma de Bernoulli.

Définition – Propriété

Soit une épreuve de Bernoulli et p la probabilité d'obtenir un succès (et donc $q = 1 - p$, la probabilité d'un échec).

Si l'épreuve est répétée n fois dans les conditions du schéma de Bernoulli, alors la probabilité d'obtenir k succès est : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de succès est appelée la loi binomiale de paramètres n et p. Elle est notée $B(n\,;p)$.

Exemple d'application

Dans une ville de 50 000 habitants, on a recensé 1 000 cas de grippe.
On s'intéresse au nombre d'enfants malades dans une crèche de 35 enfants.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'enfants atteints par la grippe.
Justifions que X suit une loi Binomiale et donnons ces paramètres.

On choisit au hasard une personne de cette ville, la probabilité qu'elle soit atteinte de la grippe est $\frac{1000}{50\,000}$ soit $\frac{1}{50}$.
Une personne choisie dans cette ville est atteinte ou pas de la grippe. Nous n'avons que deux issues et deux seulement, donc nous avons une épreuve de Bernoull, comme l'épreuve est répétée 35 fois de façon indépendante.

On a un schéma de Bernoulli. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres 35 et $\frac{1}{50}$.

La loi de X est donnée par la formule suivante : $P(X=k) = C_{35}^k \times \left(\frac{1}{50}\right)^k \times \left(\frac{49}{50}\right)^{35-k}$.

Pour s'entraîner : Exercices 25 ; 26 ; 27 ; 29 ; 30 ; 31 ; 32 ; 34 ; 35

Propriété

L'espérance mathématique de la variable X suivant une loi binomiale $B(n\,;p)$ est $E(X) = np$ et sa variance est $V(X) = npq$.

Exemple d'application

Dans une ville de 50 000 habitants, on a recensé 1 000 cas de grippe.
On s'intéresse au nombre d'enfants malades dans une crèche de 35 enfants.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'enfants atteints par la grippe.
X suite une loi Binomiale de paramètres 35 et $\frac{1}{50}$.

Donc, $E(X) = 35 \times \frac{1}{50} = \frac{7}{10}$ et $V(X) = 35 \times \frac{1}{50} \times \frac{49}{50} = \frac{343}{500}$.

QUESTION 1

Comment calculer des probabilités à l'aide d'un arbre de probabilité ou de la formule des probabilités totales ?

Méthode

Pour calculer des probabilités, on peut procéder de la façon suivante :

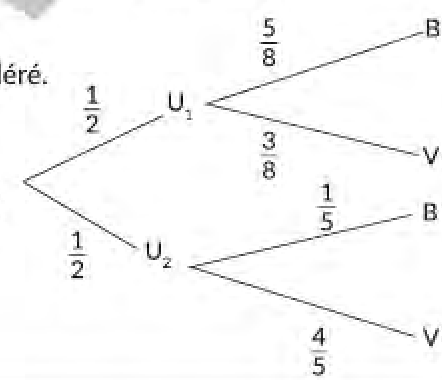
- on définit des évènements ;
- on traduit les données de l'énoncé ;
- on construit l'arbre pondéré puis on utilise les formules des probabilités totales.

Exercice

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement 5 boules blanches, 3 boules vertes et 1 boule blanche, 4 boules vertes.
On choisit une urne au hasard, puis on tire au hasard une boule dans cette urne.
Détermine la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 sachant qu'elle est blanche.

Solution commentée

Soit les évènements suivants :
U_1 : « l'urne choisit est U_1 »; U_2 : « l'urne choisit est U_2» ; B : « la boule tirée est blanche » ;
V : « la boule tirée est verte ».
L'énoncé nous demande de calculer $P_B(U_1)$.
Cela nécessite de calculer $P(U_1 \cap B)$ et $P(B)$ à l'aide d'un arbre pondéré.



On en déduit : $P(B) = P(U_1 \cap B) + P(U_2 \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{33}{80}$

Par suite, $P_B(U_1) = \dfrac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{5}{8}}{\frac{33}{80}} = \dfrac{25}{33}$.

Exercice non corrigé

Dans une population la probabilité d'être malade du paludisme est p. Un test de dépistage du paludisme possède les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'un individu malade ait un test positif est 0,99 ;
- la probabilité qu'un individu sain ait un test négatif est 0,99.

Exprime en fonction de p la probabilité qu'un individu soit malade sachant que son test est positif.

QUESTION 2

Comment déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale ?

Méthode

La loi de probabilité d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p est donnée par la formule $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

Exercice

Dans un village, la probabilité d'avoir un garçon est de 0,49.
On considère une famille de trois enfants sans jumeaux. On note X la variable aléatoire égale au nombre de garçons.

1. Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.
1. Détermine la loi de probabilité de X

Solution commentée

1. La naissance d'un enfant conduit à deux et seulement deux résultats, donc l'on a une épreuve de Bernoulli. L'épreuve est répétée trois fois de suite de façon identique et indépendante, donc on a un schéma de Bernoulli. X suit donc une loi binomiale de paramètres 3 et 0,49.
2. On a : $P(X=k)=C_3^k\times(0,49)^k\times(0,51)^{3-k}$ avec X(Ω) = { 0,1,2,3 }.

$P(X=0)=C_3^0\times(0,49)^0\times(0,51)^{3-0}=0,14$; $P(X=1)=C_3^1\times(0,49)^1\times(0,51)^2=0,38$,

$P(X=2)=C_3^2\times(0,49)^2\times(0,51)^1=0,36$; $P(X=3)=C_3^3\times(0,49)^3\times(0,51)^0=0,12$.

Exercice non corrigé

Un Q.C.M comporte 10 questions offrant chacune 3 réponses possibles dont une seule est exacte.

On répond complètement au hasard.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses justes au Q.C.M.

1. Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.
2. Détermine la loi de probabilité de X.

QUESTION 3

Comment calculer l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale ?

Méthode

Lorsqu'on a une variable aléatoire qui suit une loi binomiale, l'espérance mathématique et la variance sont données respectivement par les formules suivantes : E(X) = np et V(X) = $np(1-p)$.

Exercice

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres 3 et 0,49.
Calcule l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) de X.

Solution commentée

La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres 3 et 0,49, donc :
E(X) = 3 × 0,49 = 1,47 et V(X) = 3 × 0,49 × (1− 0,49) = 0,74.

Exercice non corrigé

Un Q.C.M comporte 10 questions offrant chacune 3 réponses possibles dont une seule est exacte.

On répond complètement au hasard.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses justes au Q.C.M

La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres 10 et 1/3 .

Calcule l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) de X.

Exercices de fixation

Probabilité conditionnelle

1 Soit A et B deux évènements d'un même univers.
Pour chaque énoncé, trois réponses sont proposées dont une seule est juste.
Écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la réponse juste.

N°	Énoncés	Réponses		
		a	b	c
1	La probabilité de B sachant que A est réalisé se note	$P_B(A)$	$P_A(B)$	$P(A\cap B)$
2	La probabilité de B sachant que A est réalisé est égale à	$\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$	$\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$	$P(A\cap B)$
3	La probabilité de A et B est égale à	$P(B) \times P_A(B)$	$P(A) + P_A(B)$	$P(A) \times P_A(B)$
4	La probabilité de B est égale à	$P(A\cap B) + P(A)$	$P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)$	$P(A\cap B) + P(A\cap B)$

2 Expérience aléatoire $\sum_3$

(Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible)

Dans une ville, 80 % de la population a été vaccinée contre la COVID-19.

Une enquête a relevé les résultats suivants :

15 % de la population vaccinée a la COVID-19 :

40 % de la population non vaccinée a la COVID-19.

On choisit au hasard une personne dans cette ville et on considère les événements suivants :

- ✓ V : « la personne choisie a été vaccinée »
- ✓ C : « la personne choisie a la COVID-19 »

1. a) Construis l'arbre pondéré traduisant cette situation.
   b) Donne P(V) ; $P_V(C)$.
2. a) Détermine la probabilité que la personne soit vaccinée et ait la COVID-19.
   b) Détermine $P(\bar{V}\cap C)$.

3 Un sondage a été effectué auprès d'élèves de terminale après les résultats du BAC.

90 % ont révisé sérieusement dont 80 % ont eu le BAC ; 30 % de ceux qui n'ont pas révisé sérieusement ont eu le bac.
On choisit au hasard un élève sondé et on considère les événements :
B : « l'élève a eu le BAC » ; R : « l'élève a révisé sérieusement »
1. a) Donne P(R) ; $P_R(B)$ et $P_{\bar{R}}(B)$.
b) Complète l'arbre pondéré suivant :

2.a) Calcule $P(R\cap B)$ et $P(\bar{R}\cap B)$.
b) Déduis-en P (B).

4 En reprenant l'expérience aléatoire $\sum_3$, (exercice 2) :

1. Justifie que : $P(C) = \dfrac{1}{5}$.
2. Une personne choisie au hasard a la COVID-19, détermine la probabilité qu'elle soit vaccinée.

5 Deux fournisseurs proposent du beurre de cacao. Un grossisse achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et le reste chez le fournisseur B.

10% des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de matières grasses végétales et 20% de celles provenant du fournisseur B présentent des traces de matières grasses végétales.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les événements suivants :

A : « la boîte provient du fournisseur A » ;

B : « la boîte provient du fournisseur B » ;

S : « la boîte présente des traces de matières grasses végétales ».

1. Traduis la situation par un arbre pondéré.
2. Détermine la probabilité de l'évènement $B\cap\bar{S}$.
3. Justifie que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de matières grasses végétales est égale à 0,88.

4. Détermine la probabilité qu'une boite provienne du fournisseur B sachant qu'elle présente des traces de matières grasses végétales.

6 On considère les urnes U_1, U_2 et U_3 telles que :

- L'urne U_1 contient 1 boule rouge et 5 boules jaunes ;
- L'urne U_2 contient 3 boules rouges et 1 boule jaune ;
- L'urne U_3 contient 1 boule rouge et 2 boules jaunes.

On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne.

Détermine la probabilité que la boule tirée soit rouge.

7 Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : deux bleues « B » et trois rouges « R ».

On dispose également de deux sacs contenant des jetons : l'un est bleu et contient un jeton bleu « b » et trois jetons rouges « r », l'autre est rouge et contient deux jetons bleus « b » et deux jetons rouges « r ».

On extrait une boule de l'urne, puis on tire un jeton dans le sac qui est de la même couleur que la boule tirée.

1. Combien y a-t-il d'issues possibles ? Justifie ta réponse.

2. À l'aide d'un arbre pondéré, détermine la probabilité de chacune de ses issues.

3. Détermine la probabilité de l'événement A:« la boule et le jeton extraits sont de la même couleur ».

Événements indépendants

8 Une association de 96 membres propose différentes activités à ses adhérents dont le foot et le tennis.

12 membres s'inscrivent pour le foot ; 32 membres pour le tennis et 4 pour les deux sports.

On prend au hasard la fiche d'un adhérent. On note A et B les évènements suivants :

A : « l'adhérent est inscrit pour le foot » ; B : « l'adhérent est inscrit pour le tennis ».

Démontre que les évènements A et B sont indépendants.

9 Soient A et B deux événements indépendants tels que $P(A) = \frac{1}{5}$ et $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

Calcule : P(B).

10 Le tableau ci-contre donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue choisie et de l'activité sportive choisie. On choisit un élève au hasard.

	Handball	Natation	Basket
Anglais	45	18	27
Espagnol	33	9	18

1. Démontre que les événements « étudier l'espagnol » et « pratiquer le Handball » ne sont pas indépendants.

2. Démontre que les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer le Basket » sont indépendants.

Variables aléatoires - Loi de probabilité

11 Justifie que le tableau ci-dessous détermine la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	−93	0	200	730
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

12 Détermine la valeur du nombre réel a pour que le tableau ci-dessous détermine la loi de probabilité d'une Variable aléatoire X.

x_i	−1999	2002	1	2022	2041
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{9}$	a	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$

13 On considère un dé blanc et un dé noir, cubiques et équilibrés.

Le dé blanc comporte : deux faces numérotées −1 ; deux faces numérotées 0 et deux faces numérotées 1.

Le dé noir comporte : une face numérotée 0 ; trois faces numérotées 1 et deux faces numérotées 2.

On lance simultanément les deux dés. On note X la somme des points obtenus.

1 .a) Justifie que X est une variable aléatoire.

b) Détermine les valeurs prises par X.

2. Détermine la loi de probabilité de X.

Fonction de répartition

14 Réponds par vrai si l'affirmation est vraie et par faux si l'affirmation est fausse.

1. La fonction de répartition d'une variable aléatoire est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

2. La fonction de répartition d'une variable aléatoire est une application croissante.
3. La représentation graphique d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire n'est pas en escalier.
4. La fonction de répartition d'une variable aléatoire est une application affine par intervalles.

15 Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous.

x_i	−1	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

1. Détermine la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.
2. Construis la courbe représentative de la fonction F.

16 On considère un dé blanc et un dé noir, cubiques et équilibrés.

Le dé blanc comporte : deux faces numérotées -1 ; deux faces numérotées 0 et deux faces numérotées 1.

Le dé noir comporte : une face numérotée 0 ; trois faces numérotées 1 et deux faces numérotées 2.

On lance simultanément les deux dés. On note X la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus.

1. Détermine la loi de probabilité de X.
2. a) Définis F, la fonction de répartition de X.
   b) Construis la représentation graphique de F.

Espérance mathématique, variance et écart type

17 Pour chaque énoncé, quatre réponses sont proposées dont une seule est juste.

Écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la réponse juste.

(n est un nombre entier supérieur ou égal à 2 et p, un nombre réel tel que : $0 < p < 1$.)

1. L'espérance mathématique d'une loi binomiale de paramètres n et p est égale à :

a) np ; b) $n(1-p)$; c) $pn(1-p)$; d) n^2p.

2. L'écart type d'une loi binomiale de paramètres n et p est égale à :

a) $\sqrt{np}$; b) $\sqrt{n(1-p)}$; c) $\sqrt{pn(1-p)}$; d) $\sqrt{n^2p}$.

18 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	−1	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{4}{36}$

Calcule l'espérance mathématique de X.

19 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	-1	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{4}{36}$

Sachant que $E(X) = \frac{7}{6}$, calcule la variance et l'écart type de X.

20 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans { 0 ;1 } avec pour loi de probabilité :

$P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$ ($p \in [0 ; 1]$).

Démontre que : $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.

21 On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres n et p vérifiant : E(X)=43,2 et V(X)=27,648.

1. Démontre que : 1-p = 0,64.
2. Déduis – en les valeurs de p et de n

22 On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres 25 et p vérifiant $\sigma(X)=1,5$.

Détermine la ou les valeurs possibles de p.

Épreuve de Bernoulli - Schéma de Bernoulli

23 Justifie que le sexe d'un enfant à naître dans une famille sans jumeaux est une épreuve de Bernoulli.

24 Justifie que le résultat au Baccalauréat pour des élèves d'une classe de 60 élèves est un schéma de Bernoulli.

Loi binomiale

25 Dans une ville, la probabilité d'avoir une fille est de 0,51.

On considère une famille de cinq enfants sans jumeaux. On note X le nombre de filles.

Justifie que X suit une loi binomiale.

26 On considère la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,36.

1. Détermine la loi de X.
2. Calcule : a) $P(X=3)$; b) $P(X\leq 2)$ et c) $P(X\geq 1)$.

27 Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres 2 et p tels que : $P(X=1)=0,3$.

Détermine les valeurs possibles de p. On arrondira les résultats au centième.

28 Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres 2022 et $\frac{1}{14}$.

1. Calcule l'espérance mathématique de X.
2. Calcule la variance de X.

29 On considère un jeu de grattage dans lequel la probabilité pour un joueur de gagner est de 0,1.

On considère 100 joueurs ayant participé à ce jeu. On suppose que les résultats « gagner » ou « perdre » sont indépendants.

On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de gagnants parmi ces 100 joueurs.

1. Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.
2. Détermine la probabilité qu'il y ait :
   a) exactement 12 gagnants.
   b) plus d'un gagnant.

30 On considère un jeu de grattage dans lequel la probabilité pour un joueur de gagner est de $\frac{1}{10}$.

On considère n ($n>1$) joueurs ayant participé à ce jeu. On suppose que les résultats « gagner » ou « perdre » sont indépendants.

On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de gagnants parmi ces n joueurs.

1.a) Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.

b) Détermine la loi de probabilité de X.

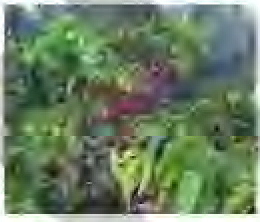
2. Détermine la plus petite valeur de n pour que la probabilité qu'au moins un joueur soit gagnant soit supérieur à 0,99.

31 On considère que la probabilité qu'un élève de terminale ait 18 ans ou plus durant l'année scolaire est 0,67. On considère une classe de terminale de 35 élèves.

On considère la variable aléatoire X donnant le nombre d'élèves dont l'âge est inférieur à 18 ans à la fin de l'année.

1. Justifie que X suite une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.
2. Calcule : a) $P(X=10)$; b) $P(X\geq 2)$
3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.

32 Un commerçant a en stock 10 boîtes de cafés.



Une étude sur ce stock à montrer que la probabilité qu'une boîte de café ne présente aucune trace de pesticide est égale à 0,88.

On suppose que le stock est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage successive avec remise.

On considère la variable aléatoire X donnant dans ce stock, le nombre de boîtes sans trace de Pesticides.

1. Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.
2. Calcule la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.
3. Calcule la probabilité qu'au moins une boîte ne présente aucune trace de pesticides.

33 Une urne contient 4 boules : 1 boule verte et 3 boules rouges.

On tire 3 fois de suite une boule dans cette urne, en y replaçant la boule tirée après chaque tirage.

On note S l'évènement « tirer une boule verte » et X la variable aléatoire égale au nombre de fois que la boule verte est tirée.

1. Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.
2. Démontre que l'espérance mathématique de X est égale à l'écart type de X.

34 Un élève répond au hasard aux 6 questions d'un QCM. À chaque question, 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de réponses justes.

1. Justifie que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. a) Calcule la probabilité que l'élève a d'avoir exactement trois bonnes réponses.

   b) Calcule la probabilité que l'élève a d'avoir au moins une bonne réponse.
3. Calcule l'espérance mathématique de X et interprète ce résultat.

35 Une étude statistique a montré qu'une mère qui possède un caractère génétique C le transmet à son enfant dans un cas sur dix. Une mère qui possède ce caractère génétique C, souhaite fonder une famille de quatre enfants.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'enfants parmi les quatre qui présentent le caractère C.

1. Détermine la probabilité de l'évènement :

a) A : « deux enfants exactement présentent le caractère C » ;

b) B « trois enfants au moins présente le caractère C ».

2. Calcule l'espérance mathématique de X et interprète le résultat.

Exercice de renforcement / Approfondissement

36 On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Pour cela, 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.

Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8 ; on ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre.

1. Donne la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament.

2. Démontre que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52.

3. On soumet au test un individu pris au hasard.

Détermine la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie.

4. On contrôle 5 individus pris au hasard.

a) Détermine la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé.

b) Détermine la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé.

37 Un joueur lance un dé équilibré ; si le numéro est un nombre premier, le joueur gagne une somme égale au produit du nombre premier par 1000 (en CFA) ; sinon il perd la somme égale au nombre obtenu multiplié par 1 000.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Justifie que les valeurs prises par X sont :

- 6000 ; - 4000 ; -1000 ; 2 000 ; 3 000 ; 5 000.

2. Détermine la loi de probabilité de X.

3. a) Calcule l'espérance mathématique de X et son écart- type.

b) Le jeu est-il favorable au joueur ? Justifie ta réponse.

4. Définis la fonction de répartition F de X.

38 Une urne contient sept boules indiscernables au toucher : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule. Si elle est rouge, il gagne 10 000 francs ; si elle est jaune il perd 5 000 francs ; si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir replacé la première boule tirée dans l'urne. Si cette boule tirée est rouge, il gagne 8 000 francs sinon il perd 4 000 francs. On désigne par :

R_1 l'événement : « tirer une boule rouge au premier tirage » ;

J l'évènement : « tirer une boule jaune au premier tirage » ;

V l'évènement : « tirer une boule verte au premier tirage » ;

R_2 l'évènement : « tirer une boule rouge au deuxième tirage » et $\overline{R_2}$ l'évènement contraire de R_2 .

1. a) Justifie que : $p(R_1) = \frac{1}{7}$ et $p(\overline{R_2}) = \frac{5}{6}$.

b) Construis un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu.

2. Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur (une perte est comptée négativement).

a) Justifie que l'ensemble des valeurs prises par X est {-5 000 ; -4 000 ; 8 000 ; 10 000 }.

b) Etablis la loi de probabilité de X.

c) Calcule l'espérance mathématique E(X) de X. Donne une interprétation de ce résultat.

d) Calcule la variance de X

3. Définis la fonction de répartition F de X puis la représenter dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm pour 1 000 francs sur l'axe (OI)et 21 cm pour une unité sur l'axe (O J).

39 Dans une école d'ingénieurs, 20% des candidats sont admis directement sur présentation de dossiers. Tous les autres candidats passent une épreuve écrite. Ceux qui l'ont ratée, sont éliminés. Ceux qui l'ont réussie passent un test d'oral.

75% des candidats qui passent l'épreuve écrite la réussissent. Deux tiers des candidats qui passent l'épreuve orale la réussissent et sont admis.

On considère les événements suivants :

D : « Le candidat est admis sur dossier »

E : « Le candidat passe et réussit l'épreuve écrite »

F : « Le candidat passe et réussit l'épreuve orale »

1. Traduis la situation à l'aide d'un arbre de choix.
2. On choisit un candidat au hasard.
   a) Détermine la probabilité qu'il ait passé et raté l'épreuve orale.
   b) Détermine la probabilité qu'il soit admis en ayant passé l'épreuve écrite.
3. Calcule la probabilité d'être admis à ce concours.

40 On dispose de 2 dés parfaits dont les faces sont numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6. On lance successivement ces 2 dés, puis on fait la somme des chiffres obtenus sur les faces supérieures.

1. Calcule la probabilité de l'événement « la somme est paire ».
2. Calcule la probabilité « sur le premier dé, on obtient le numéro 6 ».
3. Calcule la probabilité de l'événement « la somme est paire sachant que le premier dé a donné le chiffre 6 ».

41 On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient 3 boules rouges et 2 boules noires, l'urne U_2 contient 5 boules rouges et une boule noire. On jette un dé parfaitement cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, puis on lit le chiffre obtenu sur la face supérieure. Si le chiffre obtenu est 6 ou 2, on tire une boule de l'urne U_1. Si le chiffre est différent de 6 et de 2, on tire une boule de l'urne U_2.

Sachant que la boule tirée est noire, calcule la probabilité qu'elle ait été tirée de l'urne U_1.

42 Dans une population, il y a 45% d'hommes et 55% de femmes ; 4% des hommes et 5% des femmes présentent un caractère P.

1. Détermine la proportion de personnes qui présentent le caractère P.
2. On prend un individu au hasard.

43 On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite. On dispose de tests de dépistage de la maladie.

Si une personne est malade, la probabilité que son test soit positif est 0,95; notons $P_M(T)$ cette probabilité.

La probabilité que le test d'une personne soit positif sachant qu'elle est saine, est 0,1 ; notons, $P_{\overline{M}}(T)$ cette probabilité.

1. a) Calcule la probabilité d'être malade et testé positif.
   b) Calcule la probabilité d'être sain et testé positif.
   c) Calcule la probabilité d'être testé positif.
2. Calcule la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif.
3. Calcule la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif.
4. Calcule la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif.
5. Calcule la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif.

44 Une usine produit des règles en grande quantité. La probabilité qu'une règle présente un défaut est égale à 0,1. On prélève au hasard un échantillon de 8 règles dans la production d'une journée.

La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 8 règles.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de règles présentant un défaut parmi les 8 règles prélevées.

1. Justifie que X suit une loi binomiale. Donne les paramètres de cette loi.
2. Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Il n'y a aucune règle avec un défaut. » ;

B: « Il y a exactement deux règles avec un défaut. » ;

C: « Il y a au moins une règle avec un défaut. ».

3. Calcule l'espérance mathématique de la variable X. Interprète ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

45 On dispose de deux urnes :

- une urne U_1 dans laquelle se trouvent trois boules blanches et deux boules noires.
- une urne U_2 dans laquelle se trouvent deux boules blanches et trois boules noires.

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de chaque urne : on obtient ainsi quatre boules, les tirages dans chaque urne étant équiprobables.

1. Justifie que la probabilité de l'événement E : «parmi les quatre boules tirées, il y a exactement deux boules blanches», est égale à 0,46.
2. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches obtenues.
   a) Détermine la loi de probabilité de X.
   b) Le joueur doit verser 1500 F avant d'effectuer le tirage ; il reçoit à l'issue du tirage 600 F par boule blanche obtenue.
   c) Dis si le jeu est équitable.
3. Calcule la probabilité d'avoir tiré une et une seule boule blanche de l'urne U_1 sachant qu'on a tiré exactement deux boules blanches.
4. On ne considère que l'urne U_1, de laquelle on tire toujours au hasard et simultanément deux boules.

On nomme succès le tirage de deux boules blanches.

On renouvelle dix fois la même épreuve (en remettant chaque fois les boules tirées dans l'urne). Détermine la probabilité d'avoir au moins deux succès sur les dix tirages.

46 On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.
U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un entier supérieur ou égal à 1).
U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.
On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.
1. On considère l'événement A : «après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ».
a) Justifie que la probabilité P(A) de l'événement A peut s'écrire : $P(A) = \frac{3}{4}(\frac{n+2}{n+3})$.
b) Détermine la limite de P(A) lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On considère l'événement B : «après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche».
Vérifie que la probabilité P(B) de l'événement B peut s'écrire : $P(B) = \frac{6}{4(n+3)}$.
3. Un joueur mise 20 F et effectue une épreuve.
À l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans U_2 :
- si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit 2n F ;
- si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n F ;
- si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

a) Explique pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.
Dans la suite, on considère $n > 10$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeur les gains algébriques du joueur (par exemple, si après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, $X = 2n - 20$).
b) Détermine la loi de probabilité de X.
c) Calcule l'espérance mathématique de X.
d) On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive.
Démontre qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

47 En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs. Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B. Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.
On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :
- A l'événement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
- B l'événement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
- V l'événement « La personne interrogée dit la vérité ».

1. Construis un arbre de probabilité traduisant la situation.
2. a) Calcule la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
b) Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calcule la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.
3. Démontre que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est 0,529.
4. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4. L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1 200 réponses. Détermine le temps moyen, exprimé en heures, que l'institut doit prévoir pour parvenir à cet objectif.

48 Une entreprise possède 50 ordinateurs. La probabilité qu'un ordinateur tombe en panne est de 0, 01. On suppose que le fonctionnement d'un ordinateur est indépendant des autres.
1. Calcule la probabilité qu'aucun ordinateur ne tombe en panne.
2. Calcule la probabilité que 5 ordinateurs soient en panne.
3. Calcule la probabilité de l'événement E : « au moins un ordinateur est en panne».
4. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'ordinateurs en panne parmi les 50 disponibles.
a) Calcule $p(X = 3)$.
b) Calculer $p(X \leq 3)$. Interprète ce résultat.
c) Calculer E(X). Interprète ce résultat.

49 Un jeu est constitué d'un grattage suivi d'une loterie. Pour participer à ce jeu, le joueur achète un billet à 10 000 francs CFA.
Il gratte une case sur le billet, il peut alors gagner 100 000 francs CFA avec une probabilité de $\frac{1}{50}$ ou bien ne rien gagner.

Ensuite, il participe à une loterie avec le même billet. À cette loterie, il peut gagner

100 000 francs CFA ou 200 000 francs CFA ou ne rien gagner.

On désigne par :

G l'événement : « le joueur gagne au grattage » ;

A l'événement : « le joueur gagne 100 000 f à la loterie » ;

B l'événement : « le joueur gagne 200 000 f à la loterie » ;

R l'événement « le joueur ne gagne rien à la loterie » ;

On admet que si le joueur n'a rien gagné au grattage, la probabilité qu'il gagne 100 000 francs CFA à la loterie est $\frac{1}{70}$ et la probabilité qu'il gagne 200 000 francs CFA à la loterie est $\frac{1}{490}$.

1. Fais un arbre de probabilités.

2. Le joueur n'a rien gagné au grattage, calcule la probabilité qu'il ne gagne rien à la loterie.

3. a) Indique au bout de chaque flèche de l'arbre le gain algébrique du joueur.

On désigne par X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique du joueur.

b) Donne l'ensemble des valeurs prises par X.

On donne $P(X=90\,000)=\frac{13}{500}$ et $P(X=190\,000)=\frac{1}{125}$.

4. a) Démontre que la probabilité que le joueur gagne 10 000 francs CFA à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 000 francs CFA au grattage est $\frac{3}{10}$.

b) Démontre que la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 000 francs CFA au grattage est $\frac{6}{10}$.

5. a) Définis la loi de probabilité de X.

b) Calcule l'espérance mathématique E (X) de X et interprète le résultat.

50 Pour jouer aux fléchettes, je choisis en fermant les yeux une fléchette dans une boîte contenant des fléchettes bleues et des fléchettes rouges.

J'ai 25% de chance de tomber sur une fléchette bleue. Avec une fléchette bleue, j'ai 70% de chance de toucher la cible. Avec une fléchette rouge, j'ai 30% de chance de rater ma cible. Soit R l'événement : «j'ai choisis une fléchette rouge » et C l'événement : «j'ai touché la cible ».

Écris le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. Les événements R et C sont indépendants.
2. Les événements $\bar{R}$ et $\bar{C}$ sont indépendants.
3. Les événements R et $\bar{R}$ sont indépendants.

Situations complexes

51 Un fabricant produit et vend 400 consoles de jeux par mois. Le coût de production est de 160 000 FCFA par console. Le fabricant réalise un test de conformité, dans les mêmes conditions, sur chacun des objets fabriqués. Le test est positif dans 93 % des cas et la console de jeu reconnue conforme peut alors être vendue à 290 000 F CFA. Si le test est reconnu négatif, la console de jeu est bradée au prix de 150 000 FCFA.

Le fabricant espère un bénéfice mensuel moyen de 45 000 000 FCFA pour les mettre en réserve afin de renforcer ses fonds propres. Mais il s'inquiète et partage cette inquiétude avec son fils en classe de terminale D. Celui-ci te contacte.

Propose-lui une solution argumentée.

52 Un jeu de "pile ou face " consiste à lancer plusieurs fois de suite une pièce de monnaie et à noter le nombre de "faces" obtenu à l'issu des lancers.

L'organisateur du jeu te propose deux options.

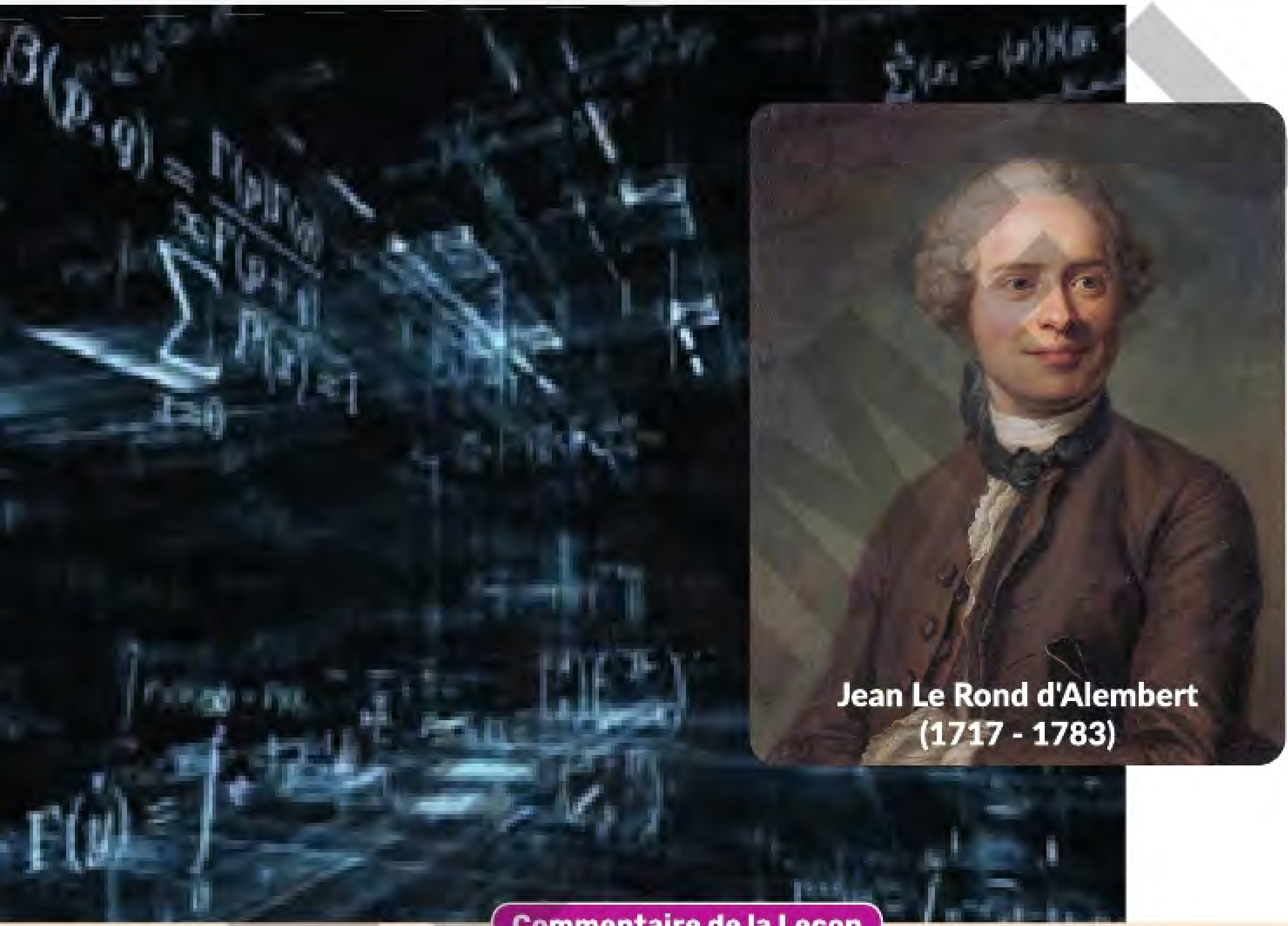
Option 1 : tu lances trois fois de suite la pièce de monnaie. Tu ne gagnes que si tu obtiens exactement deux fois "face" à l'issu des trois lancers.

Option 2 : tu lances quatre fois de suite la pièce de monnaie. Tu ne gagnes que si tu obtiens au moins trois fois "face" à l'issu des quatre lancers.

Avant ta participation au jeu, tu décides de te retirer pour réfléchir à l'option susceptible de te permettre d'avoir le plus de chance de gagner.

Détermine cette option en basant ton raisonnement sur tes connaissances mathématiques.

3 DÉRIVABILITÉ ET ÉTUDE DE FONCTIONS



Jean Le Rond d'Alembert
(1717 - 1783)

Commentaire de la Leçon

C'est au XVIIIe siècle que **Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)** introduit une définition plus rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours. Cependant, à l'époque de d'Alembert, c'est la notion de limite qui pose problème. C'est seulement avec les travaux de Weierstrass au milieu du 19e siècle que le concept de dérivée sera entièrement formalisé.

L'apprenant a déjà étudié la dérivabilité et l'étude de quelques fonctions en classe de première. En classe de terminale, la notion de dérivabilité et l'étude de fonctions va s'étoffer par l'apport de nouvelles notions et propriétés notamment, le calcul de la dérivée de la composée de deux fonctions, le calcul du nombre dérivé de la bijection réciproque d'une bijection en un point, les inégalités des accroissements finis, les dérivées successives, le point d'inflexion, etc. On ne demandera pas de justifier la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle lors des évaluations. On se limitera à l'utilisation de la formule donnant la dérivée d'une fonction réciproque uniquement en un point et cela par des exemples ne présentant pas de difficulté particulière.

La notion de dérivabilité va se poursuivre au niveau supérieur avec le calcul différentiel.

La notion de dérivabilité est utilisée en économie, en balistique, en cinématique, en technologie, en industrie...

Habiletés et Contenus

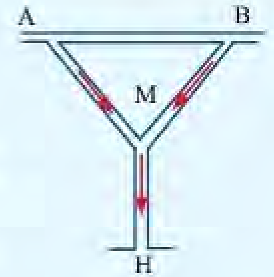
- **Connaître** la définition d'une fonction dérivable à gauche (respectivement à droite) en un point ; la définition des dérivées successives d'une fonction ; les nouvelles notations des dérivées successives $\frac{df}{dx}, \frac{d^2 f}{dx^2}, ..., \frac{d^n f}{dx^n}, (n \in \mathbb{N}^*)$ les propriétés relatives à la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle ; la propriété relative à la dérivée d'une fonction composée ; les propriétés relatives à l'inégalité des accroissements finis (les 2 formes).
- **Noter** un nombre dérivé à gauche (respectivement à droite) d'une fonction ; les dérivées successives d'une fonction.
- **Reconnaître** graphiquement un point d'inflexion.
- **Déterminer** le signe d'une fonction en utilisant ses variations ; le sens de variation d'une bijection réciproque d'une fonction f sur un intervalle J connaissant le sens de variation de f sur un intervalle I ; le nombre dérivé de la fonction f^{-1} en un point y_0 ; un point d'inflexion d'une courbe représentative d'une fonction ; des dérivées successives d'une fonction.
- **Étudier** la dérivabilité d'une fonction définie par intervalles en un point de raccordement.
- **Calculer** le nombre dérivé en un point d'une fonction composée ; la dérivée d'une fonction composée.
- **Représenter** graphiquement la bijection réciproque d'une bijection dans un repère orthonormé ; une demi-tangente; graphiquement une fonction du type : $x \mapsto \cos(ax+b)$; $x \mapsto \sin(ax+b)$; $x \mapsto \tan(ax+b)$;

  $x \mapsto \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}$; $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$;

  $x \mapsto \sqrt{ax+b}$; $x \mapsto \sqrt{ax^2+bx+c}$;

  graphiquement des fonctions de raccordement ; graphiquement une fonction: comportant une valeur absolue ; comportant une racine carrée.
- **Interpréter** graphiquement la dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction en un point x_0.
- **Démontrer** qu'une fonction composée est dérivable en un point.
- **Utiliser** l'inégalité des accroissements finis pour : démontrer une inégalité ; établir un encadrement.
- **Traiter une situation** faisant appel à la dérivabilité et à la représentation graphique des fonctions.

Situation d'Apprentissage

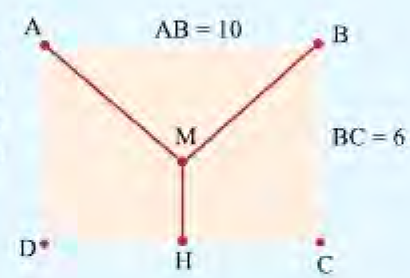


Un proviseur décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur un mur, à l'arrière de la façade d'une classe du lycée.

Sur ce mur, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluie pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.

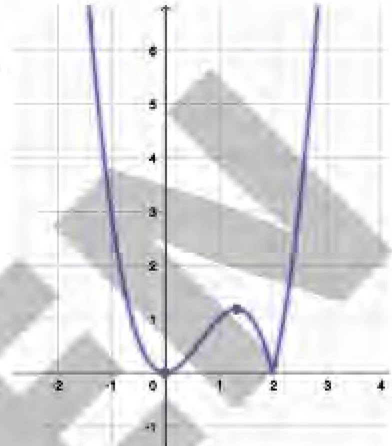
Sur ce plan, le support de [MH] est la médiatrice de [DC].

Afin de réduire le coût de la tuyauterie, le Proviseur veut trouver sur le mur de cette classe, la position du point M qui minimise la longueur totale des tuyaux. Il sollicite les élèves de cette classe. Ceux -ci décident d'étudier une fonction pour minimiser la longueur totale des tuyaux.



Activité 1 Dérivabilité d'une fonction à gauche (respectivement à droite) en un point

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2|x-2|$.
La courbe (C) ci-contre est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).



1. Calcule : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

2. Compare : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

3. Trace les demi-tangentes à (C) au point d'abscisse 2 après avoir reproduit le graphique.

Récapitulons

I est un intervalle ouvert.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, soit $a \in I$ et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).

- On dit que f est dérivable à gauche en a lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.

  Cette limite s'appelle le nombre dérivé de f à gauche en a, on la note : $f_g'(a)$.
- (C) admet une demi-tangente à gauche au point A abscisse a.
- On dit que f est dérivable à droite en a lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.
- Cette limite s'appelle le nombre dérivé de f à droite en a, on la note : $f_d'(a)$.
- (C) admet une demi-tangente à droite au point A abscisse a.

Exercice de fixation

1 f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant a. (C) est la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).

α et β sont deux nombres réels. On pose : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \alpha$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \beta$.

(D) et (Δ) sont des droites passant par A(a ; $f(a)$) et de coefficient directeurs respectifs α et β.

Recopie et relie ci-dessous chaque expression de gauche à celle de droite qui lui correspond.

α est •	• la demi-tangente à droite au point A à (C)
β est •	• le nombre dérivé de f à droite en a
(D) est •	• le nombre dérivé de f à gauche en a
(Δ) est •	• la demi-tangente à gauche au point A à (C)

Activité 2 Tangente et demi-tangente verticale

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;0[, f(x) = \sqrt{-x} \\ \forall x \in [0;+\infty[, f(x) = \sqrt{x} \end{cases}$

et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Trace la courbe (C).
2. Étudie la dérivabilité de f en 0 puis interprète graphiquement les résultats.
3. Soit M(x ; $f(x)$) un point de (C) distinct du point O.
   a) Calcule le coefficient directeur de la droite (OM).
   b) Interprète les résultats des questions 1 et 2.

Récapitulons

On admet que :
soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.
Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ sont infinies, alors la représentation graphique de f admet une demi-tangente verticale au point A(a ; $f(a)$).

Exercice de fixation

2 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{|1-x^2|}$.
(C) est la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).
Justifie que (C) admet au point d'abscisse 1 une tangente verticale.

Activité 3 Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle [a ; b]

On considère la fonction f définie de [0;1] vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\sqrt{x}$

1. Justifie que f est dérivable à droite en 0.
2. Étudie la dérivabilité de f en 1.
3. Déduis-en l'ensemble de dérivabilité de f.

Récapitulons

f est une fonction définie sur un intervalle [a ; b].

- On dit que f est dérivable sur]a ; b[lorsque f est dérivable en tout point de]a ; b[.
- On dit que f est dérivable sur [a ; b] lorsque f est dérivable sur]a ; b[et f est dérivable à droite de a et f est dérivable à gauche de b.

Exercice de fixation

3 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
Étudie la dérivabilité de f sur [-1 ; 1].

Activité 4 Dérivée d'une fonction composée

Partie I

On considère les fonctions h, f et g dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies respectivement par : $h(x) = (3x+2)^2$,

$f(x) = 3x + 2$ et $g(x) = x^2$.

1. a) Développe et réduis $h(x)$.

   b) Justifie que, pour tout nombre réel x, $h(x) = g \circ f(x)$

2. Calcule $h'(x)$ en utilisant la forme développée de $h(x)$.

   a) Calcule $f'(x) \times g'(f(x))$.

   b) Compare $h'(x)$ et $f'(x) \times g'(f(x))$.

3. D'une façon générale, soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J contenant f(I).

On se propose de justifier que :

$\forall\, x_0 \in I$, $(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] \times f'(x_0)$.

Soit x_0 un élément de I. $\forall\ x_0 \in I \setminus \{x_0\}$, posons : $T(x) = \dfrac{g[f(x)] - g[f(x_0)]}{x - x_0}$.

a) Justifie que :

$$T(x) = \frac{g[f(x)] - g[f(x_0)]}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

b) Justifie que lorsque x tend vers x_0, $f(x)$ tend vers $f(x_0)$.

c) Déduis des questions a) et b) que : $\lim\limits_{x \to x_0} T(x) = g'[f(x_0)] \times f'(x_0)$.

Partie II

u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I. On admet que chacune des fonctions ci-dessous est dérivable sur I.

$h_1 : x \longrightarrow \sqrt{u(x)}$

$h_2 : x \longmapsto (u(x))^r$; $r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\}$

$h_3 : x \longmapsto \cos(u(x))$

$h_4 : x \longmapsto \sin(u(x))$

En Utilisant Le résultat de la question 2b) de la partie I, conjecture la dérivée de chacune des fonctions composées ci-dessus.

Récapitulons

On admet que :

si f est une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J contenant f(I) et si f est dérivable en a ($a \in$ I) et g est dérivable en $f(a)$, alors $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

Pour tout élément de I, $\left(\sqrt{u}\right)'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$; $(u^r)'(x) = ru'(x)(u^{r-1})(x)$

$(u^r)'(x) = ru'(x) \,.\, u^{r-1}(x)$

$(\cos u)'(x) = -u'(x) \,.\, \sin(u(x))$

$(\sin u)'(x) = u'(x)\cos(u(x))$

$(\cos(u(x)))' = -u'(x)\sin(u(x))$; $(\sin(u(x)))' = u'(x)\cos(u(x))$.

Exercice de fixation

4 Dans chaque cas, calcule la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I considéré.

1. $f(x) = (2x-1)^4$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$; 2. $f(x) = \cos(2x-3)$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$;

3. $f(x) = \left(\dfrac{4x-1}{x+2}\right)^3$, $\mathrm{I} =]-2\,;+\infty[$; 4. $f(x) = \sqrt{x^2+3}$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

Activité 5 Nombre dérivée de la bijection réciproque

Soit f une bijection d'un intervalle I sur f(I) et f^{-1} sa bijection réciproque. On suppose que pour tout élément b de f(I) , $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$.

1. a) Détermine : $f \circ f^{-1}$.

b) Déduis-en que : $(f \circ f^{-1})'(b)=1$

2. En utilisant la dérivée de la composée de deux fonctions, détermine $(f \circ f^{-1})'(b)$.

3. Déduis la valeur de $(f^{-1})'(b)$.

Récapitulons

f étant une bijection d'un intervalle I sur f(I) et f^{-1} sa bijection réciproque, si pour tout élément b de f(I), $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et on a : $\left(f^{-1}\right)'(b)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$.

Exercice de fixation

5 On considère la fonction f dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Dans chaque cas, calcule $(f^{-1})'(\alpha)$.

1. $f(x) = x^3$; $\alpha = 1$; $I = \mathbb{R}$ et $f(I) = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$; $\alpha = 0$; $I = [0 ; +\infty[$ et $f(I) = [0 ; 1[$.

Activité 6 Dérivées successives

On considère la fonction f dérivable et définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=x^6 + x^5 - 5x^4 + x^2 + 7$.

1. Calcule la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On admet que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calcule la dérivée de la fonction f'. (On la notera f'').

3. On admet que f'' est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calcule la dérivée de la fonction f''. (On la notera $f^{(3)}$).

4. Calcule $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, $f^{(6)}$ et $f^{(n)}$ pour $n \geq 7$.

Récapitulons

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Si f est dérivable sur I , alors sa dérivée f' est la dérivée première de f. On la note f' *ou* $\dfrac{df}{dx}$.

Si f' est dérivable sur I , alors sa dérivée est la dérivée seconde de f. On la note f'' ou $f^{(2)}$ ou $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$

De proche en proche, la dérivée n-ième de f sur I, si elle existe, est la dérivée de la dérivé (n-1)ième de f sur I. On la note $f^{(n)}$ *ou* $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Exercices de fixation

6 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2x^6 + 3x^2 - 5$.

a) Calcule $\dfrac{d^4 f}{dx^4}$.

b) Détermine la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $\dfrac{d^n f}{dx^n} = 0$.

7 Dans chaque cas, calcule la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction f sur l'intervalle I considéré et pour n donné.

1. $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1$, $n = 2$, $I = \mathbb{R}$;
2. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2$, $n = 4$, $I =]0\,;+\infty[$.
3. $f(x) = \sin x$, $n = 3$, $I =]0\,;+\infty[$;
4. $f(x) = \cos x$, $n = 4$, $I =]0\,;+\infty[$.

Activité 7 Point d'inflexion

Soit f et g deux fonctions dont les représentations graphiques respectives (Cf) et (Cg) sont données par les figures ci-dessous. La droite (D) tracée est la tangente à chaque courbe au point d'abscisse a.

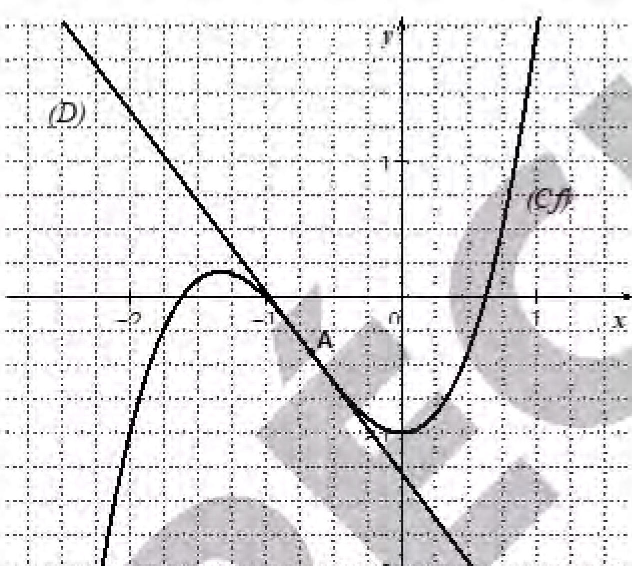


FIGURE 1

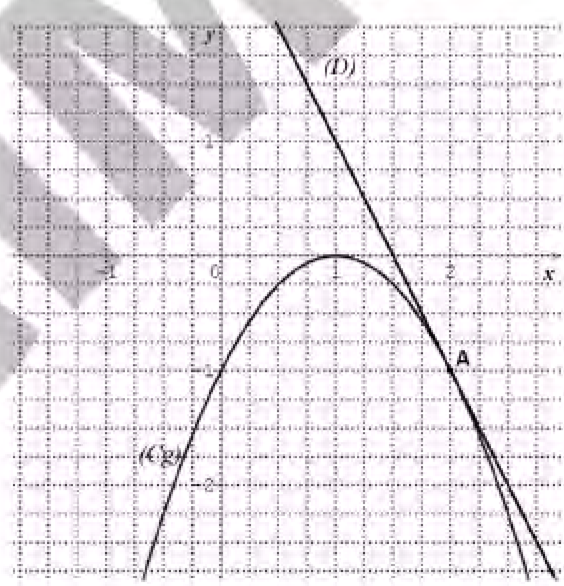


FIGURE 2

I.

1. Détermine dans quel cas la courbe traverse la tangente (D) en A.
2. Donne la position relative de chaque courbe par rapport à la tangente (D).

II. La courbe de la figure 1 est celle de la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.

1. Calcule f'', la dérivée seconde de f.
2. a) Détermine si possible, la solution a de l'équation $f''(x) = 0$.

   b) Étudie le signe de f''.
3. Détermine en fonction du signe de f'', la position relative de la courbe (Cf) par rapport à la tangente (D) au point d'abscisse a.

Récapitulons

- La courbe (Cf) traverse la tangente (D) au point A.
  On dit que le point A(a ; $f(a)$ est un point d'inflexion de (Cf).
- Nous admettons que si f'' s'annule en a en changeant de signe alors le point A(a ; $f(a)$) est un point d'inflexion de (Cf).

Exercice de fixation

8 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).

Justifie que le point de (C) d'abscisse $\frac{1}{2}$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

9 Justifie que la courbe de la fonction : $x \mapsto x^4$ n'admet pas de point d'inflexion.

Activité 8 Inégalité des accroissements finis

I. Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ et dérivable sur $]a ; b[$.

m et M sont deux nombres réels tels que : $\forall x \in [a ; b]$, $m \leq f'(x) \leq$ M.

1. On considère la fonction g définie sur $[a ; b]$ par : $g(x) = f(x) - mx$.
   En utilisant le sens de variation de g, démontre que : $m(b - a) \leq f(b) - f(a)$.
2. On considère la fonction h définie sur $[a ; b]$ par : $h(x) = \mathrm{M}x - f(x)$.
3. En utilisant le sens de variation de h, démontre que : $f(b) - f(a) \leq \mathrm{M}(b - a)$.
4. Déduis des questions 1 et 2, un encadrement de $f(b) - f(a)$.

II. Dans cette partie f est une fonction continue sur $[a ; b]$ et dérivable sur $]a ; b[$. On suppose qu'il existe un nombre réel M tel que : $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq$ M.

En utilisant les résultats de la partie I, démontre que pour tous nombres réels a et b éléments de I,

$|f(b) - f(a)| \leq \mathrm{M}|b - a|$.

Récapitulons

- f est une fonction continue sur $[a ; b]$ et dérivable sur $]a ; b[$.
  S'il existe des nombres réels M et m tels que pour tout x élément de $[a;b]$, $m \leq f'(x) \leq$ M, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq \mathrm{M}(b-a)$.
- f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. S'il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de I, $|f'(x)| \leq$ M , alors pour tous nombres réels a et b éléments de I, $|f(b) - f(a)| \leq \mathrm{M}|b - a|$.

Exercice de fixation

10 Soient a et b deux nombres réels, tels que : $a < b$.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[a ; b]$, démontre que : $|\cos b - \cos a| \leq |b - a|$.

11
1. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur [400 ; 401], détermine un encadrement de $\sqrt{401}$.
2. Déduis-en un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{401}$ par 20.

Activité 9 Étude d'une fonction rationnelle

Exemple

Étudions et représentons graphiquement la fonction rationnelle h définie par : $h(x)=\dfrac{x^2-\dfrac{3x}{2}-1}{x}$.

L'ensemble de définition de la fonction h est : $]-\infty;0[\ \cup\ ]0\ ;+\infty[$.

On vérifie que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} h(x)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} h(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$.

On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe de la fonction h.

En tant que fonction rationnelle, h est dérivable sur $]-\infty\ ;0[$ et sur $]0\ ;+\infty[$.

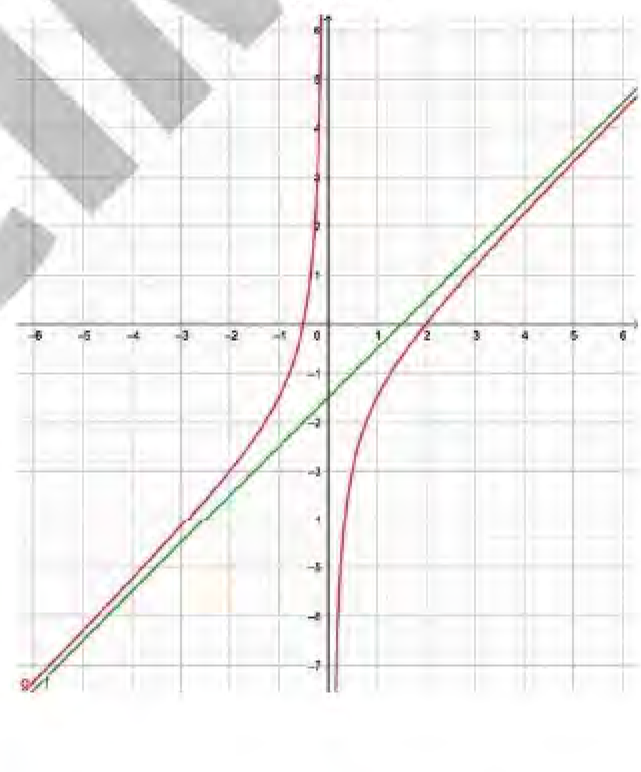
$\forall\, x \in\ ]-\infty\ ;0[\ \cup\ ]0\ ;+\infty[$. $h'(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2}$, donc la fonction h est strictement croissante sur $]-\infty\ ;0[$ et sur $]0\ ;+\infty[$.

On a : $\forall\, x \in\ ]-\infty\ ;0[\ \cup\ ]0\ ;+\infty[$, $h(x)=x-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{x}$ donc on montre que la droite d'équation $y=x-\dfrac{3}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction h en $+\infty$ et en $-\infty$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	||	$+$
$h(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow +\infty$

Courbe



À partir de cet exemple, résous l'exercice de fixation ci-dessous.

Exercice de fixation

12 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Étudie et représente graphiquement la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x)=\dfrac{2x^2-3x+3}{x^2-2x+2}$.

Activité 10 | Étude d'une fonction trigonométrique

Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Étudions et représentons graphiquement la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Ensemble de définition

La fonction g est définie pour tout nombre réel x, donc $D_g = \mathbb{R}$.

- **Périodicité**

Remarquons que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(x + \pi) = g(x)$. Donc la fonction g est périodique de période π. On peut donc restreindre son étude à l'intervalle $[0 ; \pi]$ et compléter sa courbe représentative à la translation de vecteur $\pi\,\overrightarrow{OI}$ ou $-\pi\,\overrightarrow{OI}$.

- **Limites**

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\lim_{x\to \pi} g(x) = \lim_{x\to 0} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- **Calcul de $g'(x)$**

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction g est dérivable sur $[0 ; \pi]$.

$\forall\, x \in [0 ; \pi]$, $g'(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

- **Étude du signe de $g'(x)$**

Le signe de $g'(x)$ est celui de $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \forall\, k \in \mathbb{Z}$,
$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Donc, $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \forall\, k \in \mathbb{Z}$,
$-\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi$.

Cherchons les solutions de l'inéquation $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$ dans $[0 ; \pi]$.

Pour $k = 0$, on a : $[0 ; \pi] \cap \left[\frac{-\pi}{12} ; \frac{5\pi}{12}\right] = \left[0 ; \frac{5\pi}{12}\right]$.

Pour $k = 1$, on a : $[0 ; \pi] \cap \left[\frac{11\pi}{12} ; \frac{17\pi}{12}\right] = \left[\frac{11\pi}{12} ; \pi\right]$.

Donc : $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0 ; \frac{5\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12} ; \pi\right]$.

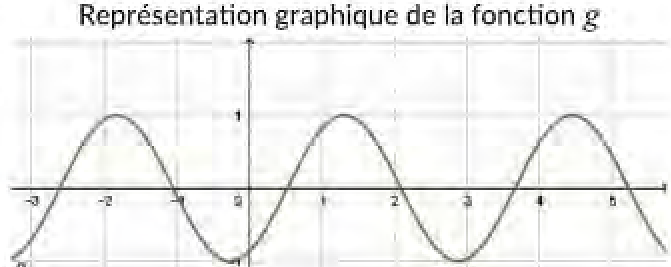
On en déduit donc que :
$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 0$ et $x \in [0 ; \pi] \Leftrightarrow x \in \left[\frac{5\pi}{12} ; \frac{11\pi}{12}\right]$.

Donc la fonction g est strictement croissante sur $\left]0 ; \frac{5\pi}{12}\right[$ et sur $\left]\frac{11\pi}{12} ; \pi\right[$ et strictement décroissante sur $\left]\frac{5\pi}{12} ; \frac{11\pi}{12}\right[$.

Tableau de variation de la fonction g

x	0		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1	↘	−1	↗	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Représentation graphique de la fonction g



À partir de cet exemple, résous les exercices de fixation ci-dessous

Exercices de fixation

13 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Étudie et représente graphiquement la fonction f définie par : $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$.

14 le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Étudie et représente graphiquement la fonction k définie par : $k(x) = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$.

I. Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite en un point

1. Définition

I est un intervalle ouvert.
Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit a un élément de I.

- On dit que f est dérivable à gauche en a lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.

  Cette limite s'appelle le nombre dérivé de f à gauche en a, on la note : $f_g'(a)$.
- Dans un repère donné, la droite passant par le point A(a ; $f(a)$) et de coefficient directeur $f_g'(a)$ est appelée la demi-tangente à gauche à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.
- On dit que f est dérivable à droite en a lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.

  Cette limite s'appelle le nombre dérivé de f à droite en a, on la note : $f_d'(a)$.
- Dans un repère donné, la droite passant par le point A(a ; $f(a)$) et de coefficient directeur $f_d'(a)$ est appelée la demi-tangente à droite à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

Exemple d'application

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; 0[, f(x) = 2x \\ \forall x \in [0 ; +\infty[, f(x) = x^2+1 \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Étudions la dérivabilité de f en 1 puis interprétons graphiquement les résultats.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{2x-2}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{2(x-1)}{x-1} = 2$

$$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x^2+1-2}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x+1) = 2$$

$$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

donc f est dérivable en 1.
La courbe (C) admet au point d'abscisse 1 une tangente de coefficient directeur 2.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 2 ; 3

2. Interprétation graphique : tangente et demi-tangente

a) Tangente verticale

Propriété

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a.

Lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ sont infinies, la représentation graphique de f admet une tangente verticale au point A(a ; $f(a)$).

Exemple d'application

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \text{ si } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} \text{ si } x < 0 \end{cases}$

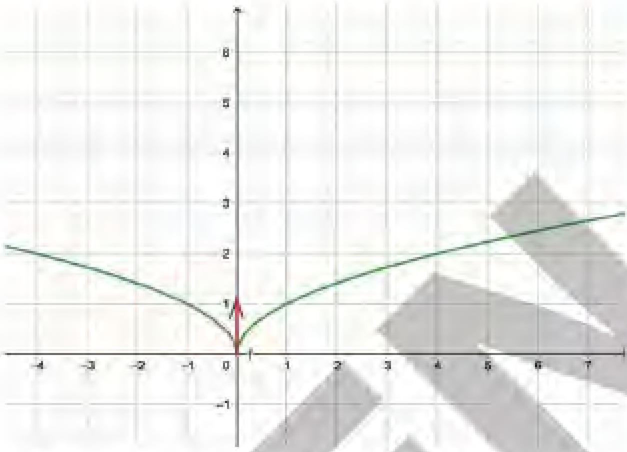
(C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).
Justifions que f admet une tangente verticale au point O.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x}}{x},$$

donc : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\sqrt{-x}}{x},$$

donc : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{\sqrt{-x}} = +\infty.$



Donc la représentation graphique (C) de f admet une tangente verticale au point O.

b) Demi-tangente

Définition

- Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère (O , I , J). Soit a un élément de Df.
- Si $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$, alors (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse a dirigée vers le bas.
- Si $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$, alors (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse a dirigée vers le haut.
- Si $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$, alors (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse a dirigée vers le haut.
- Si $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$, alors (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse a dirigée vers le bas.

Exemple d'application

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -\sqrt{x}$.

(C) est la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{-\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{-1}{\sqrt{x}} = -\infty.$$

Donc, la courbe (C) possède une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0 dirigée vers le bas.

Pour s'entraîner : Exercices 6 ; 7

3-Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle [a ; b]

Définitions

f est une fonction définie sur un intervalle [a ; b].

- On dit que f est dérivable sur]a ; b[lorsque f est dérivable en tout point de]a ; b[.
- On dit que f est dérivable sur [a ; b] lorsque f est dérivable sur]a ; b[et f est dérivable à droite de a et f est dérivable à gauche de b.

Exemple d'application

On considère la fonction f de [1;2] vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}$.
Justifions que f est dérivable à droite en 1.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\sqrt{x-1}=0$, donc f est dérivable à droite en 1.

Étudions la dérivabilité de f en 2.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}}\dfrac{(x-1)\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}}\dfrac{(x-2)(x^2-x+1)}{(x-2)\left((x-1)\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}}\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)\sqrt{x-1}+1}$

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{3}{2}$ donc f est dérivable à gauche en 2.

Déduisons l'ensemble de dérivabilité de f.

f est dérivable sur]1 ; 2 [comme produit de deux fonctions dérivables sur]1 ; 2 [, or f est dérivable à droite en 1 et à gauche en 2, on conclut que f est dérivable sur [1 ; 2].

Pour s'entraîner : Exercices 4 ; 5

II. Dérivée d'une fonction composée

1. Dérivée de la composée de deux fonctions

Propriétés

f est une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J contenant $f(\mathrm{I})$.

• Si la fonction f est dérivable en a ($a \in \mathrm{I}$) et que la fonction g est dérivable en $f(a)$, alors la fonction gof est dérivable en a et $(gof)'(a) = f'(a) \times g'[f(a)]$.

• Si la fonction f est dérivable sur I et la fonction g est dérivable sur J, alors la fonction gof est dérivable sur I et $(gof)' = f' \times (g'of)$.

Exemple d'application

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \cos\dfrac{2}{x}$.

La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{2}{x}$ est dérivable sur]0 ; +∞[et g(]0 ; +∞[) =]0 ; +∞[.

La fonction : $x \longmapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur]0 ; +∞[. Donc la fonction f est dérivable sur]0 ; +∞[et pour tout x élément de]0 ; +∞[,

$f'(x) = g'(x) \times (-\sin g(x)) = (-\dfrac{2}{x^2})(-\sin(\dfrac{2}{x}))$.

Donc $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2}{x^2} \times \sin(\dfrac{2}{x})$.

Pour s'entraîner : Exercice 10 ; 11 ; 12

2- Dérivée des fonctions du type : $\sqrt{u}$; u^r ; sin(u) et cos(u)

Propriétés

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et r un nombre rationnel non nul et différent de 1.

On a : $\forall\, x \in I, (u^r)'(x) = ru'(x)u^{r-1}(x)$; $(u > 0)$.

- Si $\forall\, x \in I, u(x) > 0$, alors $\left(\sqrt{u}\right)'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.
- $\forall\, x \in I, (\sin u)'(x) = u'(x)\cos(u(x))$.
- $\forall\, x \in I, (\cos u)'(x) = -u'(x)\sin(u(x))$.

Exemple d'application

On considère la fonction f définie sur]−2 ; 2[par : $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Calculons $f'(x)$.

La fonction $u: x \longmapsto 4 - x^2$ est strictement positive et dérivable sur]−2 ; 2 [et u( ]-2 ; 2 [ )=]0 ; 2].

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur]0 ; 2], donc, $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur]−2 ; 2[et on a :

$$\forall x \in]-2;2[, f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Pour s'entraîner : Exercices 10 ; 11 ; 12

3. Nombre dérivé de la réciproque d'une fonction continue et strictement monotone en un point

Propriété

Soit f une fonction dérivable, strictement monotone d'un intervalle I sur f(I) et f^{-1} la réciproque de f.

Soit α un élément de f(I).

Si $f'[f^{-1}(\alpha)] \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en α et $(f^{-1})'(\alpha) = \dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(\alpha)\right]}$.

Exemple d'application

Soit f la fonction de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ vers]−1 ; 1[définie par : $f(x) = \sin x$.

Justifions que f est une bijection et que f^{-1} sa bijection réciproque est dérivable en $\frac{1}{2}$ et calculons $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$.

f est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et $f(]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[) =]-1\,;1[$.

f est donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur]−1 ; 1[.

$f'(x) = \cos x$.

$\forall\, x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $\cos x \neq 0$; donc f^{-1} la bijection réciproque de f est dérivable sur]−1 ;1[.

$\frac{1}{2} \in]-1\,;1[$, d'où la dérivabilité de la fonction f^{-1} en $\frac{1}{2}$.

On a donc : $(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(\frac{1}{2})]}$.

Or : $(f^{-1})(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, donc : $(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{\cos(\frac{\pi}{6})} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Pour s'entraîner : Exercices 19 ; 20 ; 21

III. Dérivées successives

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Si f est dérivable sur I, alors sa fonction dérivée est la dérivée première de f.

On la note : f' ou $\dfrac{df}{dx}$.

- Si f' est dérivable sur I, alors sa fonction dérivée est la dérivée seconde de f.

On la note : f'' ou $f^{(2)}$ ou encore $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

- Par dérivation successive, si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, alors sa dérivée est la dérivé nième de f.

On la note : $f^{(n)}$ ou $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Exemple d'application

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2x^6 + 3x^2 - 5$

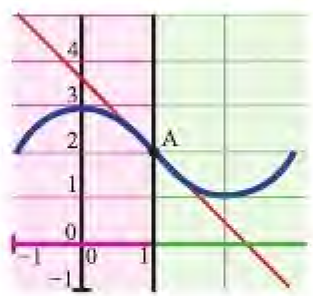
Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 12x^5 + 6x$. On écrit aussi : $\dfrac{df}{dx}(x) = 12x^5 + 6x$.

$f''(x) = 60x^4 + 6$ ou encore : $\dfrac{d^2 f}{dx^2}(x) = 60x^4 + 6$.

On peut écrire aussi : $f^{(2)}(x) = 60x^4 + 6$.

Pour s'entraîner : Exercices 8 ; 9

2. Point d'inflexion



Présentation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, (C_f) sa courbe représentative dans un repère et a un élément de I.

Le point A$(a\ ;\ f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f) si la courbe (C_g) traverse sa tangente en A.

Propriétés

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, (C_f) sa courbe représentative dans un repère et a un élément de I.

Le point A$(a\ ;\ f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f) si et seulement si f'' s'annule en a en changeant de signe.

Exemple d'application

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^3$ et (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On a : $f''(x) = 6x$

f'' s'annule en changeant de signe en 0. Donc le point O est un point d'inflexion de la courbe (C).

Pour s'entraîner : Exercices 16 ; 17 ; 18

QUESTION 1

Comment étudier la dérivabilité d'une fonction en un point lorsqu'elle est définie à gauche et à droite en ce point ?

Méthode

Pour étudier la dérivabilité d'une fonction en x_0 lorsqu'elle est définie à gauche et à droite en x_0, on peut procéder comme suit :

- on calcule : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$;
- on compare : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ si elles sont finies :

- si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, alors f est dérivable en x_0.

- si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, alors f n'est dérivable en x_0.

- si l'une des limites $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est infinie ou n'existe pas,

alors f n'est pas dérivable en x_0.

Exercice

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{2-x} \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{5-x^2}{4} \text{ si } x > 1 \end{cases}$

Étudie la dérivabilité de f en 1.

Solution commentée

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{\sqrt{2-x}-1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{1-x}{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{-1}{\sqrt{2-x}+1} = -\dfrac{1}{2}$, donc f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = -\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{\dfrac{5-x^2}{4}-1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{1-x^2}{4(x-1)} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{-1-x}{4} = -\dfrac{1}{2}$, donc f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = -\dfrac{1}{2}$.

Conclusion : On a : $f'_g(1) = f'_d(1) = \dfrac{-1}{2}$, donc f est dérivable en 1.

Exercice non corrigé

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2-x} \text{ si } x \leq 3 \\ f(x) = x^3 - 28 \text{ si } x > 3 \end{cases}$

Étudie la dérivabilité de f en 3.

QUESTION 2

Comment justifier que la courbe représentative d'une fonction admet un point d'inflexion ?

Méthode

- Pour justifier que la courbe représentative d'une fonction f deux fois dérivable et définie sur un intervalle I admet un point d'inflexion, on peut procéder de la façon suivante :
- on calcule f'' la dérivée seconde de f ;
- on résout l'équation $f''(x)=0$;
- si x_0 désigne une solution de l'équation $f''(x)=0$, on justifie que f'' change de signe.
- on conclut que le point de coordonnées (x_0 ; $f(x_0)$) est un point d'inflexion de la courbe représentative de f.

Exercice

On considère la fonction f deux fois dérivable et définie sur $[0 ; \pi]$ par : $f(x) = \cos(x)$. (C) désigne la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

Détermine un point d'inflexion de la courbe (C).

Solution commentée

Calculons f'' la dérivée seconde de f

$\forall x \in [0 ; \pi], f'(x) = -\sin x$

$\forall x \in [0 ; \pi], f''(x) = -\cos x$

Résolvons dans $[0 ; \pi]$, l'équation $f''(x) = 0$.

On a : $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Étudions le signe de f'' sur $[0 ; \pi]$.

f'' s'annule en $\frac{\pi}{2}$ et $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[$, $f''(x) < 0$ et $\forall x \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right], f''(x) > 0$.

f'' s'annule en $\frac{\pi}{2}$ en changeant de signe, donc le point A($\frac{\pi}{2}$;0) est un point d'inflexion de la courbe (C).

Exercice non corrigé

On considère la fonction f deux fois dérivable et définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \tan(x)$.

(C) désigne la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
Détermine un point d'inflexion de la courbe (C).

QUESTION 3

Comment calculer le nombre dérivé de la réciproque d'une bijection en un point?

Méthode

f est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J, et f^{-1} sa bijection réciproque.

y_0 est un élément de J.

Pour calculer $(f^{-1})'(y_0)$, on peut procéder comme suit :

- on résout dans I, l'équation $f(x)=y_0$. On note x_0 la solution de cette équation.
- on calcule $f'(x_0)$ et on vérifie que $f'(x_0) \neq 0$.
- on obtient donc : $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

Exercice

Soit f une fonction de $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ sur]0 ; +∞[définie par : $f(x)=\sqrt{2x-1}$. On suppose que f est bijective.

On donne ; $\forall x \in \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[, f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$. On note f^{-1} la réciproque de f.

Détermine si possible $(f^{-1})'(2)$.

Solution commentée

Résolvons l'équation $f(x) = 2$.

On a :

$$f(x)=2 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=2 \Leftrightarrow 2x-1=4 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$$

Calculons $f'(\frac{5}{2})$

$$f'\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\times\frac{5}{2}-1}}=\frac{1}{2}$$

$f'\left(\dfrac{5}{2}\right)\neq 0$, donc f^{-1} est dérivable en 2.

Calculons $(f^{-1})'(2)$.

$$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'\left(\frac{5}{2}\right)}=2.$$

Exercice non corrigé

Soit f une bijection de $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur]0 ; 1[définie par : $f(x) = \sin x$.

On note f^{-1} la réciproque de f.

Détermine si possible $(f^{-1})'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercices de fixation

Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite

1 Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de Vrai si l'affirmation est vraie ou de Faux si elle est fausse.

f est une fonction définie en a.

1. Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ alors f est dérivable à gauche en a.
2. Si $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ alors f n'est pas dérivable en a.
3. Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 1{,}999$ alors f est dérivable en a.
4. La fonction f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche en a et dérivable à droite en a.

2 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = x^2 + |x - 2|$.

Étudie la dérivabilité de g en 2.

3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 3x - 1 \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = 3x - 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Étudie la dérivabilité de f en 0.

Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

4 Ecris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de Vrai si l'affirmation est vraie ou de Faux si elle est fausse.

f est une fonction définie sur l'intervalle $[a;b]$.

1. Si f est dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b alors f est dérivable sur l'intervalle $[a;b]$.
2. Si f est dérivable en tout élément de $]a;b[$ alors f est dérivable sur l'intervalle $[a;b]$.
3. Si f est dérivable sur $]a;b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b alors f est dérivable sur l'intervalle $[a;b]$.

5 On considère la fonction f de [-1 ; 0] vers $\mathbb{R}$ définie par:

$f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$

Étudie la dérivabilité de f sur [-1 ; 0].

Tangente - tangente verticale

6 Soit f une fonction de représentation graphique (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de Vrai si l'affirmation est vraie ou de Faux si elle est fausse.

1. Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$, alors la courbe (C) admet une tangente horizontale au point d'abscisse a.
2. Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = b$, ($b \in \mathbb{R}$) alors la courbe (C) admet au point d'abscisse a une tangente à gauche de coefficient directeur b.
3. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = k$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = k$ où $k \in \mathbb{R}$ alors la courbe (C) admet deux demi-tangentes au point d'abscisse a.
4. Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ alors la courbe (C) admet une tangente verticale au point d'abscisse a.

7 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ et (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, puis donne une interprétation graphique du résultat obtenu.

Dérivées successives

8 Pour chacun des énoncés ci-dessous, trois réponses sont proposées et une seule est juste.

Écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la réponse juste.

1. La dérivée 3^{ième} sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \longmapsto x^3$ est la fonction...

   a) $ax \longmapsto 3x$; b) $x \longmapsto 3x^2$; c) $x \longmapsto 6$
2. La dérivée 4^{ième} d'une fonction f se note :

   a) f^4 ; b) $\frac{d^4 f}{dx^4}$; c) $\frac{df^4}{d^4 x}$
3. La dérivée 5^{ième} d'une fonction f est la dérivée de ...

   a) La dérivée 4^{ième} de f ; b) la dérivée 6^{ième} de f ; c) $f^{(5)}$

9 Calcule la dérivée 3^{ième} de f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$; $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 2\sin x - 3\cos x$; $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$; $I =]1;+\infty[$

Dérivée d'une fonction composée

10 u et v sont deux fonctions dérivables.

Recopie et relie chaque fonction de la colonne A à sa dérivée dans la colonne B.

A	B
$u \circ v$	$u'\times v' \circ u$
$v \circ u$	$ru'u^{r-1}$
$\sqrt{u}$	$-u'\sin(u)$
u^r	$v'\times u'\circ v$
$\cos(u)$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$

11 Pour chacun des énoncés incomplets ci-dessous, trois réponses sont proposées et une seule est juste.

Écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la réponse juste.

1. La fonction : $x \longmapsto \sin(x^2)$ a pour dérivée sur $\mathbb{R}$ la fonction :
   a) $x \longmapsto \cos(x^2)$; b) $x \longmapsto 2x\cos(x^2)$; c) $x \longmapsto -2x\cos(x^2)$.
2. f étant une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, la dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \longmapsto f(\cos x)$ est la fonction :
   a) $x \longmapsto \sin x\, f'(\cos x)$; b) $x \longmapsto -\sin x\, f'(\cos x)$;
   c) $x \longmapsto -\sin x\, f'(\sin x)$.
3. La dérivée sur $]1;+\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ est la fonction :....
   a) $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; b) $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$; c) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

12 Calcule la dérivée de f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \sin(3x - 4)$; $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = (-2x + 5)^6$; $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$; $I =]0;+\infty[$.
4. $f(x) = \cos^4 x$; $I = \mathbb{R}$.

Inégalités des accroissements finis

13 On donne la liste suivante : $\boldsymbol{m \leq f'(x) \leq M}$; fonction dérivable ; a et b ;

$\boldsymbol{a < b}$; $\boldsymbol{m(b-a)}$; x élément de $[a;b]$; $\boldsymbol{m}$ **et** $\boldsymbol{M}$; $\boldsymbol{M(b-a)}$.

Recopie le texte incomplet ci-dessous en remplaçant les pointillés par les éléments de la liste ci-dessus.

TEXTE

Soit f une .... sur un intervalle ouvert I, ... deux éléments de I tels que

.... S'il existe deux nombres réels .... tels que pour tout ....

.................., alors ....$\leq f(b) - f(a) \leq$ ....

14 Soit f une fonction dérivable sur $[0;+\infty[$ et $a \in]0;+\infty[$ tel que : $\forall x \in [0;a], \dfrac{1}{2} \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{3}$ et $f(0) = 0$.

Justifie que : $\dfrac{a}{2} \leq f(a) \leq \dfrac{a}{3}$.

15 Démontre en utilisant l'inégalité des accroissements finis que, pour tout nombre réel x, $|\sin x| \leq |x|$.

Point d'inflexion

16 Identifie la figure sur laquelle le point A est un point d'inflexion de la courbe (Cf).

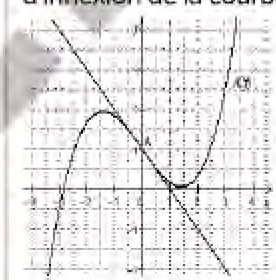


FIGURE 1

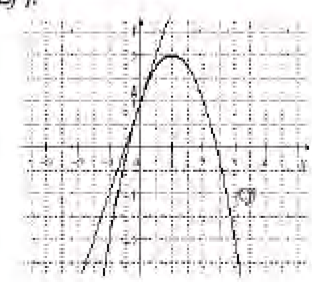


FIGURE 2

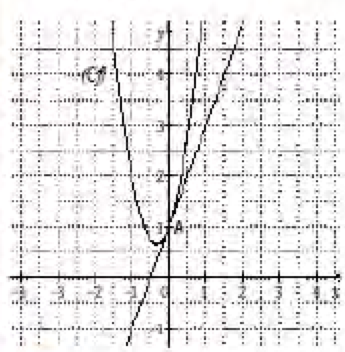


FIGURE 3

17 On considère la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$. (C) désigne la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

Détermine un point d'inflexion de la courbe (C).

18 Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de Vrai si l'affirmation est vraie ou de Faux si elle est fausse.

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative.

1. Si f'' s'annule en a alors le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f).
2. Si $f'' < 0$ sur $]-\infty;a[$, $f''(a) = 0$ et $f'' > 0$ sur $]a;+\infty[$ alors le point $A(a;f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f).
3. Si f'' s'annule en a et garde un signe constant sur I alors le point $A(a ; f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f).
4. Si la courbe (C_f) traverse la tangente (T) au point $A(a;f(a))$ alors le point A est point d'inflexion de (C_f).

Nombre dérivée de la réciproque d'une bijection en un point

19 Soit g une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J et g^{-1} sa réciproque.

Soient $x_0 \in$ I et $y_0 \in$ J tels que : $y_0 = g(x_0)$.

Recopie le numéro de chacun des énoncés ci-dessous suivi de Vrai si l'énoncé est vrai ou de Faux s'il est faux.

1. $\left(g^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{g'(x_0)}$.
2. $g'(x_0) = \dfrac{1}{\left(g^{-1}\right)'(y_0)}$ si $(g^{-1})'(y_0) \neq 0$.
3. $(g^{-1})'(y_0)$ n'existe pas si $g'(x_0)=0$.
4. Si $g'(g^{-1}(y_0)) \neq 0$ alors g^{-1} est dérivable en y_0.

20 Soit f une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0;1]$ telle que :

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. f^{-1} est la réciproque de f.

Justifie que f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ puis détermine $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$.

21 Soit la fonction g dérivable et définie sur $[0;1]$ par : $g(x) = \dfrac{x-1}{2x+1}$. On admet que $\forall x \in [0;1], g'(x) = \dfrac{3}{(2x+1)^2}$ et que g est une bijection de $[0;1]$ sur $[-1 ; 0]$.

g^{-1} désigne la réciproque de g.

Calcule $\left(g^{-1}\right)'\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Exercice de renforcement/ approfondissement

22 Détermine un encadrement de $\sqrt{1001}$ en utilisant l'inégalité des accroissements finis.

23 On considère la fonction g de $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \tan x$.

1. Démontre que : $\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$, $1 \leq g'(x) \leq 2$.
2. Déduis-en que : $\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$, $x \leq \tan x \leq 2x$.

24 Démontre que pour tout x élément de $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$, $1 + \dfrac{x}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$

25 Soit la fonction h de $[1 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

1. a) Dresse le tableau de variation de h sur $[1 ; +\infty[$.

b) Justifie que l'équation $h(x) = x$ admet une solution unique α dans $[1 ; +\infty[$.

2. a) Démontre que pour tout x élément de $[1 ; +\infty[$, $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

b) Déduis-en que pour tout x élément de $[1 ; +\infty[$, $|h(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

26 On considère les fonctions f et g dérivables sur $]-1 ; 1[$ et définies par : $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

1. Calcule pour tout x élément de $]-1 ; 1[$ les dérivées premières, secondes et troisièmes de chacune des fonctions f et g.
2. Déduis-en pour tout x élément de $]-1;1[$ les dérivées n-ièmes de f et celles de g.

27 On considère la fonction f définie par :

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, a et b étant deux nombres réels.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1. Détermine a et b pour que la tangente à la représentation graphique (C) de la fonction f au point d'abscisse 0 ait pour équation : $y = -3x + 1$ et $f'(1) = f'(-1)$.
2. Étudie les variations de f.
3. Construis (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).

28 On considère la fonction f définie par :
$f(x)=\dfrac{ax+2}{2x+1}$, a étant un nombre réel.

1. Détermine a pour que la courbe représentative (C) de f admette au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation : $y = -5x + 2$.
2. Dresse le tableau de variation de f pour $a = -1$.

29 On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$par : $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}$, a et b étant deux nombres réels.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1. Détermine a et b pour que la courbe représentative (C) de f admette au point de coordonnées (-3 ;1), une tangente horizontale.
2. Dresse le tableau de variation de f.
3. Trace (C) dans le repère (O, I, J).

30 Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{2x(x-2)}$.

(C) est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1. a) Détermine l'ensemble de définition D_f de f.

b) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c) Détermine les asymptotes à (C).

2. Calcule $f'(x)$.

3. a) Étudie les variations de f.

b) Dresse le tableau de variation de f.

4. Représente graphiquement la courbe (C) dans le repère (O, I, J) .

31 Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x)=|x-3|+\dfrac{1}{x-2}$.

(C) est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1. a) Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

b) Calcule les limites de f aux bornes de D_f.

c) Démontre que la droite d'équation $y = -x + 3$ est asymptote à (C) en - ∞ et que la droite d'équation $y = x - 3$ est asymptote à (C) en + ∞.

2. a) Étudie la dérivabilité de f en 3.

b) Calcule $f'(x)$ pour tout élément x de D_f.

c) Étudie le sens de variation de la fonction f.

d) Dresse le tableau de variation de la fonction f.

3. Construis la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J) .

32 Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x)=x-3+\dfrac{1}{|x-2|}$.

(C) est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère.

1. a) Détermine l'ensemble de définition de f.

b) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. a) Étudie les variations de f.

b) Dresse le tableau de variation de f.

3. Construis la courbe (C).

33 Calcule si possible le nombre dérivé à gauche et à droite, en x_0 de la fonction f définie par :

1. $f(x) = -3x^2 + 7|x|$ en $x_0=0$.
2. $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x-1}$ en $x_0=-2$.
3. $f(x)=\sqrt{x|x-1|}$ en $x_0=1$

Mes séances d'exercices

34 On donne la fonction polynôme f définie par :

$f(x) = 3x^2 + 5$.

1. Démontre que la fonction f est dérivable en 1 et calcule son nombre dérivé en 1.
2. (Cf) est la représentation graphique de la fonction dans le plan muni d'un repère orthonormé (O; I; J) et A est le point de (Cf) d'abscisse 1.

   Détermine une équation de la tangente (T) en A à (Cf).
3. Construis la courbe (Cf) et trace la tangente (T).

35 Étudie la dérivabilité en 0 de chacune des fonctions f, g et h définies par :

$f(x) = |x^3|$; $g(x) = x|x|$; $h(x) = \sqrt{x} + x$.

36 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; détermine sa dérivée dans chacun des cas ci-dessous, en précisant dans chaque cas l'ensemble de dérivabilité de f.

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - \frac{3}{4}x - 5$;
2. $f(x) = 3x - 4 + \frac{2}{2x+7}$; 3. $f(x) = 2x - \cos x$
4. $f(x) = \frac{3x^2 - x + 2}{3x - 1}$; 5. $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$
6. $f(x) = \cos^3(x^2 - 2x)$; 7. $f(x) = x\sqrt{3x-2}$
8. $f(x) = \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^{\frac{2}{3}}$.

37 On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 3}$.

1. Détermine l'ensemble de définition de g.
2. Calcule la dérivée de g en précisant son ensemble de dérivabilité.
3. Calcule les nombres dérivés de la fonction g en -2 et en 3.
4. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe de g au point d'abscisse -2.

38 On considère la fonction f définie par :

$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

1. Donne l'ensemble de définition de f.
2. Calcule les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudie le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Déduis-en les variations de f et dresse son tableau de variation.
5. Détermine les extremums relatifs de f.

39 On considère la fonction rationnelle f définie par: $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$ dont la représentation graphique dans un repère orthonormé (O; I; J) est (Cf).

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. a. Calcule : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x)$ puis interprète graphiquement les résultats obtenus.

   b) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
3. Détermine les réels a, b et c tels que : $\forall x \in Df$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.
4. a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 3$ est une asymptote à la courbe (Cf) en $+\infty$ et en $-\infty$.

   b) Étudie les positions relatives de (Cf) et de la droite (D).
5. a) Démontre que : $\forall x \in Df$, $f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$.

   b) Détermine le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

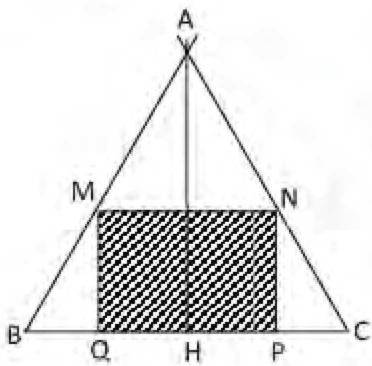
   c) Déduis-en le sens de variation de f puis dresse le tableau de variation de f.
6. Détermine une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 1.
7. Détermine si possible les extremums relatifs de f.
8. Construis (Cf), (D) et (T).

40 ABC est un triangle équilatéral de côté a.

MNPQ est un rectangle inscrit dans le triangle ABC comme l'indique la figure ci-contre.

H est le pied de la hauteur issue de A.

On pose : $BQ=x$.



1. Vérifie que : $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
2. Démontre que : $MQ=x\sqrt{3}$
3. Exprime l'aire du rectangle MNPQ en fonction de x.
4. Détermine la position du point Q pour laquelle l'aire du rectangle est maximale.
5. Calcule alors l'aire maximale du rectangle MNPQ.

41 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = x|x-3| + 2$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Étudie la continuité de f en 3.
2. Étudie la dérivabilité de f en 3. Interprète graphiquement les résultats obtenus.
3. Étudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
4. Trace (C).

42 Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$f(x)=x^2-2\sqrt{x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Étudie la dérivabilité de f en 0 puis interprète graphiquement le résultat.
2. Calcule les limites de $f(x)$ et $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$ puis interprète graphiquement les résultats.
3. Étudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
4. Trace (C).

43 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x)=\dfrac{x}{|x|+1}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Étudie la continuité de f en 0.
3. Démontre que (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente dont on précisera une équation.
4. Étudie la parité de f et donne une interprétation graphique du résultat.
5. Calcule la limite de f en $+\infty$. Interprète graphiquement le résultat.
6. Étudie le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$ et dresse le tableau de variation de f.
7. Trace la courbe (C).

44 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x)=\dfrac{x^2+|x-2|}{x+1}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Étudie la continuité de f en 2.
2. Étudie la dérivabilité de f en 2. Interprète graphiquement les résultats.
3. Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Étudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
5. Démontre que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y=x-2$ et $y=x$ sont asymptotes à (C)
   a) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Étudie la position de (C) par rapport à (D_1) sur $]-\infty;-1[\cup]-1;2]$.
   c) Étudie la position de (C) par rapport à (D_2) sur $[2;+\infty[$.
6. Trace (D_1), (D_2) et (C).

45 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x)=\sqrt{x^2+3x+2}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Partie A

1. Justifie que l'ensemble de définition de f est $]-\infty;-2] \cup [-1;+\infty[$.
2. Étudie la dérivabilité de f en -1 et en -2 puis interprète graphiquement les résultats.
3. Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Étudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
5. Démontre que les droites (D_1) : $y=-x-\dfrac{3}{2}$ et (D_2) : $y=x+\dfrac{3}{2}$ sont asymptotes à (C) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.
6. Démontre que la droite (Δ) : $x=-\dfrac{3}{2}$ est un axe de symétrie de (C).
7. Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
8. Trace (D_1), (D_2), (T) et (C).

Partie B

Soit g la restriction de f à l'intervalle $[-1\,;+\infty[$.

1. Démontre que g est une bijection de $[-1\,;+\infty[$ sur $[0\,;+\infty[$.
2. Justifie que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable en $\sqrt{2}$ et calcule $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.

46 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Démontre que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle K que l'on précisera.
2. Justifie que la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable en 1 et calcule $(f^{-1})'(1)$.
3. a) Trace (C).
   b) Trace (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère que (C).

47 Soit la fonction f définie sur [0 ; 1] par :

$f(x)=x-2\sqrt{x}-1$

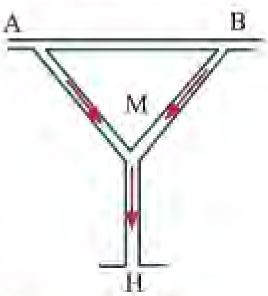
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On prendra pour unité graphique 10 cm.

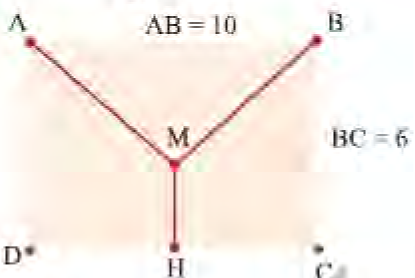
1. a) Étudie la dérivabilité de f en 0.
   b) Interprète graphiquement le résultat précédent.
2. Démontre que f est une bijection de [0 ; 1] sur [0 ; 1]
3. Démontre que pour tout $x \in [0\,;1]$, $f \circ f(x)=x$.
4. Déduis en la bijection réciproque f^{-1} de f.
5. Construis (C).

Situations complexes

48 Un proviseur décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur un mur,

à l'arrière de la façade d'une classe du lycée.
Sur ce mur, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluie pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir (voir la figure ci-dessous).





Sur ce plan, le rectangle ABCD représente le mur et H le réservoir. Les segments [AM], [MB] et [MH] désignent les tuyaux. Le support du segment [MH] est la médiatrice de [DC].
On donne : AB =10 et BC = 6.
On note Q le projeté orthogonal de M sur la droite (BC) et on prend comme variable la mesure en radian de l'angle aigu $\widehat{BMQ}$ avec mes $\widehat{BMQ} = \theta$, $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.
Afin de réduire le coût de la tuyauterie, le Proviseur cherche la position du point M sur le mur afin de minimiser la longueur des tuyaux à acheter. Il te sollicite. A l'aide de tes connaissances mathématiques, détermine la valeur exacte de θ qui minimise la longueur totale des tuyaux.
(Indication : on pourra démontrer que :

$g(\theta) = 6 + \left(\frac{10-5\sin\theta}{\cos\theta}\right)$

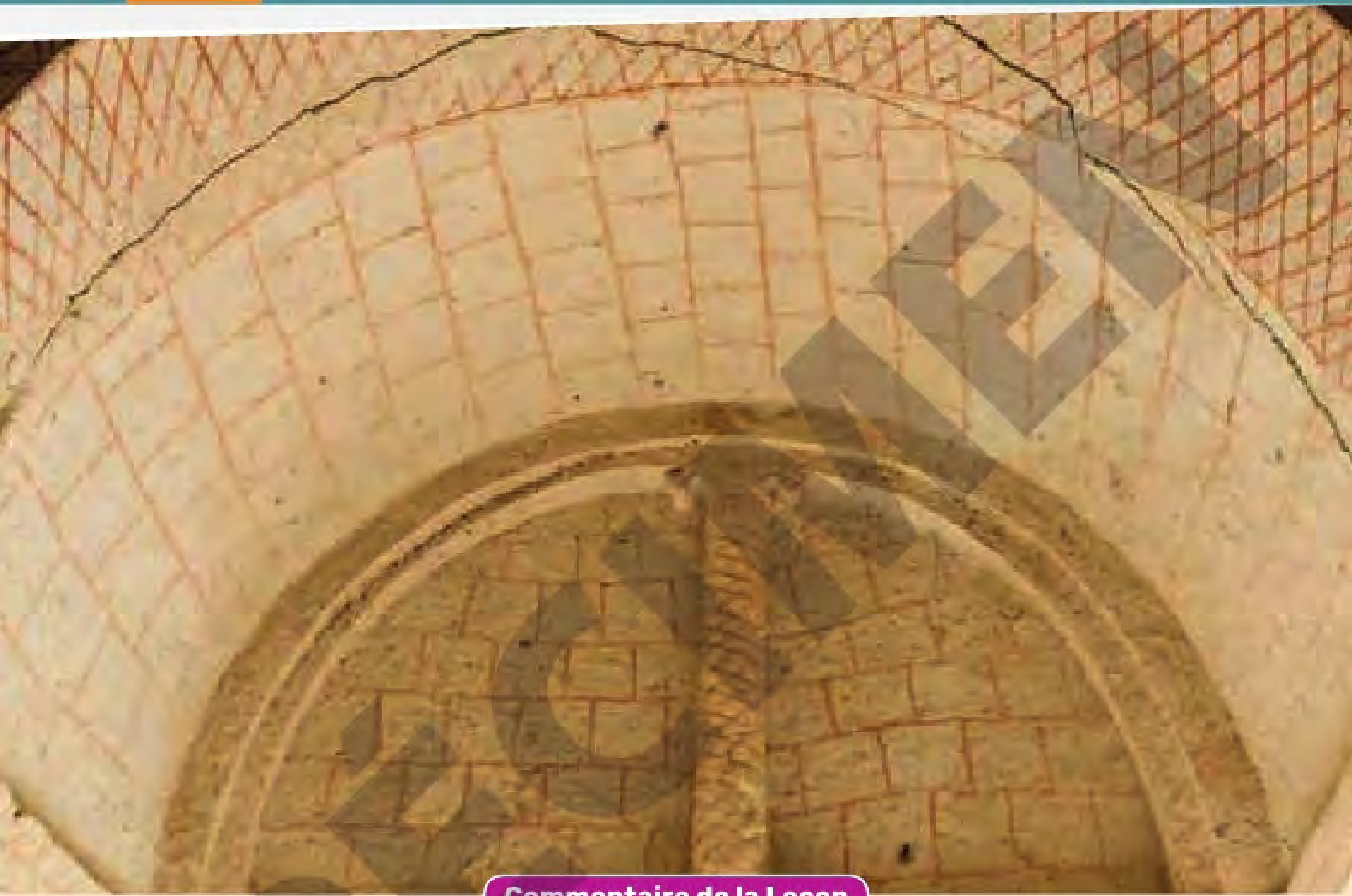
où g est la fonction correspondant à la longueur total des tuyaux.

49 Pendant les vacances, tu travailles dans une société de fabrication de parapluie en zone industrielle à Abidjan. Cette société fabrique chaque jour x parapluies avec $x \in [0\,;60]$. Le coût total de production de ces parapluies, exprimé en milliers de francs, est donné par : $f(x) = x^2 - 81x$.

Chaque parapluie fabriqué est vendu au prix unitaire de 3 000 francs. Toute la production est vendue le même jour. Pour plus d'efficacité, l'entreprise veut réaliser un bénéfice maximal mais ne sait pas quelle quantité de parapluie elle doit fabriquer pour réaliser ce bénéfice maximal.
Elle te sollicite à cet effet. Donne une solution argumentée aux préoccupations de l'entreprise.
NB : bénéfice = prix de vente - coût de production

50 En visite dans une maternité à Abidjan, des élèves reçoivent les informations suivantes :
Lors de sa première année de vie, un enfant a deux types d'anticorps dans le sang : les anticorps transmis par la mère lors de la grossesse et les anticorps produits par l'enfant à partir de sa naissance. La somme des concentrations de ces deux anticorps est appelée concentration globale en anticorps dans le sang. La concentration en anticorps dans le sang est exprimée en grammes par litre (g/L).
On modélise la concentration en anticorps maternels dans le sang de l'enfant en fonction de son âge x à l'aide de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 12] par :
$f(x) = 12 \times 0{,}75^x$.
Suite à la naissance de ton petit frère, ta maman, par curiosité veut déterminer l'âge à partir duquel, la concentration en anticorps maternel du bébé sera inférieure à un gramme par litre.
À l'aide de la représentation graphique de la fonction f, réponds à la préoccupation de ta maman.

4 PRIMITIVES



Commentaire de la Leçon

Le calcul d'aires et de volumes (Cônes, pyramides) a fait naître la notion de fonction aux 17e et aux 18e siècles avec des mathématiciens comme Pascal et Leibniz. Cette notion a engendré la notion de primitive qui a permis de résoudre plus aisément ces problèmes d'ordre géométrique. La première définition rigoureuse des primitives des fonctions connues est due à Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

En classe de première, l'apprenant a étudié la dérivée d'une fonction. En classe de terminale, il sera question d'aborder les primitives. On introduira les primitives comme opération inverse des dérivées. On fera établir le tableau des primitives de référence. On fera ensuite fonctionner suffisamment les tableaux des primitives de fonction de référence, ce qui permettra de les mémoriser avant d'aborder des exemples complexes.

On pourra faire remarquer aux élèves que pour vérifier un calcul de primitive, il suffit de dériver la fonction trouvée.

Les différentes techniques pour déterminer des primitives (décomposition en élément simples, linéarisation, utilisation des formules trigonométriques) doivent être guidées.

La notion de primitive sera réinvestie par la suite à travers les intégrales puis à l'université à travers l'Analyse.

Les primitives interviennent dans différents domaines de la vie courante notamment la biologie, la mécanique et l'électricité.

Habiletés et Contenus

- **Connaître** la définition d'une primitive d'une fonction continue ; les primitives des fonctions de référence ; les primitives de : $u'+v'$; $\lambda u'$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) ; $v' \times u' o v$; $\frac{u'}{\sqrt{u}}$; $u'\cos u$; $u'\sin u$; $\frac{u'}{u^r}$; $r \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$; $u' \times u^m$, $m \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ où u et v sont des fonctions dérivables.
- **Déterminer** l'ensemble des primitives d'une fonction continu les primitives d'une fonction en utilisant les primitives des fonctions de référence la primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un point donné ; les primitives d'une fonction du type : $u'+v'$, $\lambda u'(\lambda \in \mathbb{R})$; $v' \times u' o v$; $\frac{u'}{\sqrt{u}}$; $u'\cos u$; $u'\sin u$; $\frac{u'}{u^r}$, $r \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$; $u' \times u^m$, $m \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ où u et v sont des fonctions dérivables.
- **Justifier** qu'une fonction est une primitive d'une fonction donnée
- **Traiter une situation** faisant appel aux primitives de fonctions

Situation d'Apprentissage

Lors d'une expérience portant sur l'efficacité d'un bactéricide, des élèves introduisent ce produit dans un milieu nutritif où une population de bactéries croissait. La population a continué à croître pendant un certain temps mais elle s'est arrêté de croître et a commencé à décliner.

La taille de la population à l'instant t non nul est une fonction f dont la dérivée est donnée par :

$f'(t) = -10^3 t^2 + 3 \times 10^3 t + 10^4$ et telle que : $f(0) = 10^3$.

$f(t)$ représente le nombre de bactéries et t représente le temps en heures.

Selon cette expérience, le bactéricide est jugé efficace si après son introduction, le maximum de la population de bactéries est inférieur à 460000 .

Faisant partie de ce groupe d'élèves, tu es sollicité pour apprécier l'efficacité du bactéricide.

Tu décides de former un groupe de travail afin d'effectuer des recherches sur la question.

Activité 1 Primitive d'une fonction

On considère les fonctions F et f définie sur $\mathbb{R}$ respectivement par : $F(x) = x^3 - 7x^2 + 3x - 10$ et $f(x) = 3x^2 - 14x + 3$.

1. Détermine la dérivée F' de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
2. Compare $F'(x)$ et $f(x)$.

Récapitulons

La dérivée de la fonction F sur $\mathbb{R}$ est la fonction f. On dira aussi que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercices de fixation

1 Soit f et F deux fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $F(x) = \frac{1}{x} + 3$.
Justifie que F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$

2 Associe chacune des fonctions de la colonne A a sa primitive dans la colonne B.

Colonne A	Colonne B
$7x^6 - 8x + 6$	$3x + 2$
$-21x^2$	$x^2 + 3x - 5$
$2x + 3$	$x^7 - 4x^2 + 6x - 9$
3	$-7x^3 - 1$

Activité 2 Primitive et fonction continue sur un intervalle.

1. On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$.
   Justifie que f est continue sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.
2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{2x-1}$.
   Justifie que g est une primitive de f sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Récapitulons

On admet :

Si une fonction est continue sur un intervalle, alors elle admet une primitives sur cet intervalle.

Exercice de fixation

3 Soient f, g, h et u des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que :

$f(x) = x^3 - 1$; $g(x) = \frac{1}{x}$; $h(x) = \sqrt{x}$ et $u(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Identifie celles qui admettent une primitive sur leurs ensembles de définition.

Activité 3 Primitives d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

On considère la fonction G telle que G soit une primitive de f sur I.

1. Compare $G'(x)$ et $F'(x)$.
2. Déduis-en $G'(x) - F'(x)$.
3. En te servant de la leçon sur les dérivées, dis a quoi est égale $G(x) - F(x)$.
4. Déduis-en une expression de $G(x)$ en fonction de $F(x)$.

Récapitulons

f admet une infinité de primitives qui sont sous la forme $F(x) + c$ ou c est un nombre réel.

Exercices de fixation

4 Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = x^3 + 2$ et une fonction G définie par : $\frac{1}{4}x^4 + 2x$, une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Parmi les fonctions suivantes, indique celles qui sont des primitives de g sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x + 4$; $h(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x - 10$;

$t(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x + 25$; $n(x) = \frac{1}{4}x^3 + 2x + 1$.

5 Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3$ et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que : $F(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$.

Détermine deux autres primitives G et H de f sur $\mathbb{R}$.

Activité 4 Primitive prenant une valeur donnée en un point donnée

Soit F et G deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I.

1. Exprime $G(x)$ en fonction de $F(x)$.
2. Soit a et b deux réels tels que $G(a) = b$.
   a) Donne une expression de $G(x)$ en fonction b et de $F(a)$.
   b) Dis si l'on peut obtenir une autre expression de $G(x)$ dans ces conditions.

Récapitulons

Si G est une primitive de f sur I tel que $G(a) = b$, alors la fonction G est unique.

Exercices de fixation

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 5$.

Détermine la primitive F de f qui s'annule en -1.

7 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 1$.

On suppose que la fonction F définie par :

$F(x) = x^2 - x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. Détermine la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 5 en 0.
2. Détermine la primitive H de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur $\frac{3}{2}$ en -1.

Activité 5 Primitives des fonctions usuelles

On considère les fonctions f, g, h, m, n, p et q définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ respectivement par :

$f(x) = ax$ où a est un nombre réel ; $g(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ où n est un entier naturel non nul ; $h(x) = \dfrac{1}{x}$;

$m(x) = 2\sqrt{x}$; $n(x) = -\cos x$; $p(x) = \sin x$ et $q(x) = \tan x$.

1. Détermine les ensembles de définition respectifs de chacune de ces fonctions.
2. a) Détermine les dérivées respectives de chacune de ces fonctions.

   b) Détermine les intervalles sur lesquels chacune des fonctions dérivées est continue.
3. Déduis-en :

a) Une primitive de la fonction $x \mapsto a$ sur $\mathbb{R}$.

b) Une primitive de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$.

c) Une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$.

d) Une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$.

e) Une primitive de la fonction $x \mapsto \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

f) Une primitive de la fonction $x \mapsto \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

g) Une primitive de la fonction $x \mapsto 1+\tan^2 x$ sur les ensemble de type $\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\pi;\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right[$; où n est un entier relatif.

Récapitulons

Les fonctions : $x \mapsto ax+c$; $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$; $x \mapsto \dfrac{1}{x}+c$; $x \mapsto 2\sqrt{x}+c$; $x \mapsto -\cos x + c$; $x \mapsto \sin x + c$ et $x \mapsto \tan x + c$ où c est un nombre réel, sont des primitives des fonctions usuelles.

Exercice de fixation

7 Soit f une fonction et F sa primitive sur un intervalle contenu dans son ensemble de définition.

Recopie puis complète le tableau ci-dessous :

Fonction f	Primitive F
-2	
x^5	
$\dfrac{1}{x^2}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	
$\sin x$	
$\cos x$	
$1 + \tan^2 x$	

Activité 6 Opérations sur les primitives

1. On considère les fonctions f et g définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ respectivement par $f(x) = 2x+1$ et $g(x) = x^3$.

a) Détermine, F et G des primitives respectives de f et g sur $\mathbb{R}$.

b) On pose : $h(x) = f(x) + g(x)$.

Détermine l'expression de $h(x)$ puis une primitive H de h sur $\mathbb{R}$.

c) Compare $H(x)$ et $F(x) + G(x)$.

2. On pose $j(x) = k\,f(x)$ où k est un nombre réel.

a) Détermine l'expression de $j(x)$.

b) Détermine une primitive J de j sur $\mathbb{R}$.

c) Compare $J(x)$ et $kF(x)$.

3. On considère la fonction u dérivable sur un intervalle I et on pose :

$l(x)=\dfrac{u^{n+1}(x)}{n+1}$; $m(x) = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}(x)}$;

$n(x) = 2\sqrt{u(x)}$; $p(x) = \sin(u(x))$ et $q(x) = -\cos(u(x))$.

a) En utilisant la dérivée des fonctions composées, détermine chacune des dérivées des fonctions l, m, n, p et q.

b) Déduis-en les primitives respectives des fonctions $u'(x)u^n(x)$; $\dfrac{u'(x)}{u^n(x)}$; $\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$; $u'(x)\cos(u(x))$ et $u'(x)\sin(u(x))$.

Récapitulons

u est une fonction dérivable sur un intervalle.
F et G étant de primitives respectives de f et g.
Une primitive de $f + g$ est : F + G.

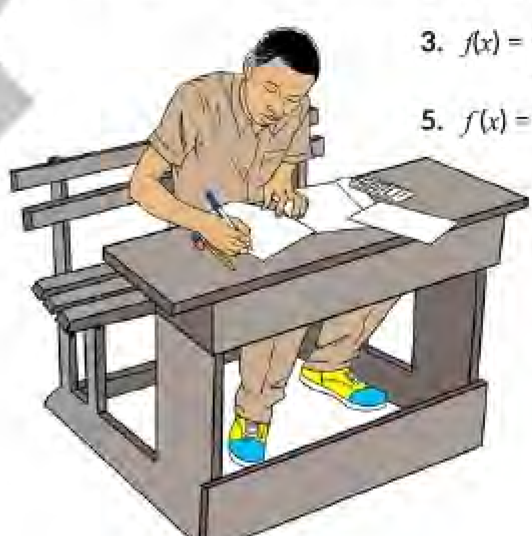
- Une primitive des kf est : kF.
- Une primitive de $u'(x)u^n(x)$ est : $\dfrac{u^{n+1}(x)}{n+1}$ $(n \neq 1)$.
- Une primitive de $\dfrac{u'(x)}{u^n(x)}$ est : $\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}(x)}$, $(n \neq 1)$
- Une primitive de $\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ est : $2\sqrt{u(x)}$.
- Une primitive de $u'(x)\cos(u(x))$ est : $\sin(u(x))$.
- Une primitive de $u'(x)\sin(u(x))$ est : $-\cos(u(x))$.

Exercices de fixation

9 Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction f.

a) $f(x) = x + \sin x$; b) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$;

c) $f(x) = \cos x - \sin x$.



10 Dans chacun des cas suivants détermine une primitive de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.

1. $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 1)^3$; **2.** $f(x) = \dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$;

3. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x+3}}$; **4.** $f(x) = -3\cos(-3x)$;

5. $f(x) = \sqrt{3}\sin(x\sqrt{3} - 7)$.

Résumé de la leçon

I. Primitive d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Une fonction F est une primitive de f sur I, lorsqu'elle est dérivable sur I et pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.

Exemple

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f tel que : $f(x) = 8x - 5$ et la fonction F telle que : $F(x) = 4x^2 - 5x$.
f admet aussi la fonction $G: x \mapsto 4x^2 - 5x + 7$ pour primitive sur $\mathbb{R}$.
En effet $F'(x) = G'(x) = f(x)$.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ;2 ;3

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 + 1$.

f est une fonction polynôme, donc f est continue sur $\mathbb{R}$, par conséquent f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Pour s'entraîner : Exercices 3 ; 4

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Toute primitive de f sur I est de la forme $G : x \mapsto F(x) + c$, où c est une constante réelle.

Exemple d'application de la propriété

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1$.

Déterminons les primitives F de f sur $\mathbb{R}$.

f est une fonction polynôme donc f est continue sur $\mathbb{R}$, par conséquent f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. De plus la fonction $x \mapsto x^2 + x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F telles que $F(x) = x^2 + x + c$, où c est une constante réelle.

Pour s'entraîner : Exercices 5 ; 6

II. Primitive prenant une valeur donnée en un point donné

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a un réel appartenant à I et b un réel quelconque.
Il existe une primitive F de f, et une seule, telle que $F(a) = b$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 5$.

Déterminons la primitive F de f qui s'annule en 1.

L'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F telles que : $F(x) = x^2 - 5x + c$, où c est une constante réelle.

La condition $F(1) = 0$ impose $F(1) = 1^2 - 5 + c = 0$. Soit $c = -1 + 5 = 4$

La primitive F de f qui s'annule en 1 est la fonction F telle que : $F(x) = x^2 - 5x + 4$.

Pour s'entraîner : Exercices 7 ; 8

III. Primitives des fonctions usuelles

La lecture à l'envers du tableau donnant les fonctions dérivées des fonctions usuelles permet de dresser un premier tableau de primitives usuelles.

Fonctions f	Primitives de f ($c \in \mathbb{R}$)	Sur l'intervalle
$x \mapsto a,\ (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n} \left(n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}\right)$	$x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$	$]0;+\infty[$
$x \mapsto x^r \left(r \in \mathbb{Q} \setminus \{0;1\}\right)$	$x \mapsto \frac{x^{r+1}}{(r+1)} + c$	$[0;+\infty[$ si $r > 0$ $]0;+\infty[$ si $r < 0$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x + c$	$\left]-\frac{\pi}{2} + \pi k\ ;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right[,\ k \in \mathbb{Z}$

Pour s'entraîner : Exercices 9 ;10

IV. Opérations sur les primitives

Propriétés

Si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors :

- F + G est une primitive de $f + g$ sur I.
- $\forall\, k \in \mathbb{R}$, kF est une primitive de kf sur I.

Le tableau suivant découle des règles de dérivation des fonctions.
u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonctions f	Une primitive de f	Observation
$u'u^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	Sur I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	u est strictement positive sur I
$u'u^r \left(r \in \mathbb{Q} \setminus \{0;-1\}\right)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	u est strictement positive sur I si $r > 0$ u est strictement négative sur Isi < 0
$u'\cos u$	$\sin u$	Sur tout intervalle où u est dérivable
$u'\sin u$	$-\cos u$	Sur tout intervalle où u est dérivable
$u'(1+tan^2 u) = \dfrac{u'}{cos^2 u}$	$\tan u$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+\pi k\,;\,\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right[,\ k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{u'}{u^n}\left(n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right)$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	Sur tout intervalle où u est dérivable et ne s'annule pas

Pour s'entraîner : Exercices 7 ; 8

Exemple d'application de la propriété

Déterminons les primitives des fonctions f dans chacun des cas suivants :

<u>1^{er} cas</u> : $f(x) = 2x(1 + x^2)^3$ sur $\mathbb{R}$

<u>2^e cas</u> : $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{sin^2(x)}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[$

<u>3^e cas</u> : $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x+5}}$ sur $\left]-\dfrac{5}{3};+\infty\right[$.

1^{er} Cas

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
Posons : $u(x) = 1+ x^2$. On a : $u'(x) = 2x$
donc : $f(x) = u'(x)u^3(x)$.
Les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par :
$F(x) = \dfrac{1}{4}u^4(x) + C = \dfrac{1}{4}(1+x^2)^4 + C$ où $C \in \mathbb{R}$ sont les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

2^e Cas

Sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[$, le sinus ne s'annule pas et la fonction f est continue sur cet intervalle.

Posons : $u(x) = \sin(x)$. On a : $u'(x) = \cos(x)$ et $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$.

Les fonctions F définies sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[$ par :
$F(x) = -\dfrac{1}{u(x)} + C = \dfrac{1}{\sin(x)} + C$ où $C \in \mathbb{R}$ sont les primitives de f $\left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[$.

3^e Cas

Sur $\left]-\dfrac{5}{3};+\infty\right[$, $(3x + 5) > 0$ et la fonction f est continue sur cet intervalle.

Posons : $u(x) = 3x + 5$. On à : $u'(x) = 3$ et $f(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$.

Les fonctions F définies sur $\left]-\dfrac{5}{3};+\infty\right[$ par :

$F(x) = \sqrt{u(x)} + c = \sqrt{3x+5} + c$ où $c \in \mathbb{R}$ sont les primitives de f sur $\left]-\dfrac{5}{3};+\infty\right[$.

Pour s'entraîner : Exercices 11 ; 12

QUESTION 1

Comment justifier qu'une fonction f est une primitive d'une fonction g ?

Méthode

Pour justifier qu'une fonction dérivable f est une primitive d'une fonction g sur un intervalle I. On peut procéder comme suit :

- on calcule la dérivée f' de la fonction f sur I ;
- on vérifie que : $\forall x \in I, f'(x) = g(x)$.

Exercice

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + 2x^2 - 5x + 3$ et $g(x) = x^4 + 4x - 5$.

Justifie que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Solution commentée

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme.

Déterminons la dérivée de f.

$\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = x^4 + 4x - 5$.

On constate que : $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = g(x)$, donc f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice non corrigé

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par : $f(x) = x^3 + 7x - 10$ et $g(x) = 3x^2+7$.

Justifie que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

QUESTION 2

Comment justifier qu'une fonction f admet des primitives sur un intervalle I donné ?

Méthode

Pour justifier qu'une fonction f admet des primitives sur un intervalle I, il suffit de justifier que f est continue sur I.

Exercice

On considère la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

Justifie que f admet des primitives sur $]1\,;+\infty[$.

Solution commentée

Posons : $f = hog$, où $h : x \to \frac{1}{x}$ et $g : x \to \sqrt{x-1}$.

On a : $Dh = \mathbb{R}^*$ et $Dg = [1\,;+\infty[$

$D_{hog} = \{x \in [1\,;+\infty[\text{ et } \sqrt{x-1} \neq 0\}$.

D'où $D_{hog} =]1\,;+\infty[$.

f est continue sur $]1\,;+\infty[$ comme composée de deux fonctions continues sur $]1\,;+\infty[$, donc f admet des primitives sur $]1\,;+\infty[$.

Exercice non corrigé

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3x - 1$.

Justifie que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

QUESTION 3

Comment déterminer la primitive F d'une fonction f qui prend la valeur b en un point a ?

Méthode

Pour déterminer la primitive F d'une fonction f qui prend la valeur b en un point a, on peut procéder comme suit :

- on détermine les primitives $F(x) = G(x) + C$ (ou G est une primitive de f) de cette fonction en utilisant le tableau des primitives des fonctions usuelles ou les différentes propriétés relatives aux primitives ;
- on détermine la valeur de la constante C en résolvant l'équation $F(a) = b$.

Exercice

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 3$.
Détermine la primitive F de f qui prend la valeur 0 en 1.

Solution commentée

Déterminons les primitives F de f.

Une primitive de la fonction : $x \mapsto x^3$ est la fonction : $x \mapsto \frac{2}{3}x^3$. Une primitive de la fonction : $x \mapsto 2x + 3$ est la fonction : $x \mapsto -x^2 + 3x$.

On a donc : $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 3x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Déterminons la valeur de C.

On a $F(1) = 0$ donc $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - 1 + 3 + C = 0$.

Par suite : $C = -\frac{35}{12}$.

Ainsi la primitive F de f qui prend la valeur 0 en 1 est la fonction F telle que : $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 3x - \frac{35}{12}$.

Exercice non corrigé

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

Détermine la primitive F de f qui prend la valeur 3 en 2.

Exercices de fixation

Primitive d'une fonction

1 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 7x - 2$ et $g(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x + 7$.

Justifie que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 7$.

Soit F, G, H, P et Q les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$F(x) = \frac{3}{2}x^2$; $G(x) = \frac{3}{2}x^2 - 7x + 10$; $H(x) = x^3 - 7x$;

$P(x) = \frac{3x^2 - 14x}{2}$ et $Q(x) = x^2 - 7$.

Parmi les fonctions F , G , H , P et Q , cite celles qui sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

3 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x| + 1$.

Justifie que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

4 Soit f, g, h, et u les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que :

$f(x) = x^4 - 10$; $g(x) = \frac{1}{x^3}$; $h(x) = \sqrt{2x-1}$ et $u(x) = \frac{x}{x^2+2}$.

Identifie celles qui admettent des primitives sur leurs ensembles de définition.

Primitives d'une fonction donnée

5 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 2x$.

Soit G une primitive de g définie par : $G(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$.

Trouve trois autres primitives de g sur $\mathbb{R}$.

6 On considère les fonctions F et f définies sur $\mathbb{R}$ par

$F(x) = x^5 + 2$ et $f(x) = 5x^4$.

1. Justifie que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déduis-en quatre autres primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Primitive prenant une valeur donnée en un point donné

7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$
Détermine la primitive F de f qui s'annule en 0.

8 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$f(x) = 3x - 1 + \frac{2}{x^3}$.

Détermine la primitive F de f sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1.

Primitives des fonctions usuelles.

9 Dans chacun des cas suivants détermine une primitive de la fonction f.

1) $f(x) = 2x + 1$; 2) $f(x) = \frac{-4}{3x^5}$;

3) $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$; 4) $f(x) = \sin x - 2\cos x$.

10 Dans chacun des cas suivants détermine les primitives sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f.

1) $f(x) = x^3$; 3) $f(x) = \sin x$; 5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2$.

2) $f(x) = \frac{1}{x^5}$; 4) $f(x) = \cos x$; 6) $f(x) = (x+1)(x-2)$.

Opérations sur les primitives

11 Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

a) $f(x) = 3\sin(-3x)$; b) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$;

c) $f(x) = \frac{-2}{(2x-5)^2}$; d) $f(x) = 2x(x^2+7)^2$.

12 Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

a) $f(x) = (2x-1)(x^2 - x + 6)^3$; b) $f(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x+2)^3}$

c) $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$; d) $f(x) = \sin x \cos^2 x$.

Exercices de renforcement/ Approfondissement

13 Réponds par VRAI (V) ou par FAUX (F) à chacune des affirmations suivantes :

3. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

$f(x) = 5x^2 - x + 7$ est la fonction F définie par :

$F(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x - 2$.

4. Une fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.
5. Si F est une primitive de f sur I et $a \in$ I tel que $F(a) = b$ alors F est unique.
6. Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ alors la fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + 5$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

14 Détermine une primitive F sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = x^2$; I = $\mathbb{R}$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; I = $]0;+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$; I = $]0;+\infty[$ 4) $f(x)=\sqrt[3]{x}$; I = $]0;+\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$; I = $]0;+\infty[$ 6) $f(x) = \sin x$; I = $\mathbb{R}$

NB: $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$.

15 Détermine une primitive F sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = -9{,}8\,x + 5$; I = $\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{3}{(3x+1)^2}$; $I=\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$

3) $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{2x-1}}$; $I=\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

4) $f(x) = 2x\cos(x^2-1)$; I = $\mathbb{R}$

5) $f(x)=(2x-1)\sqrt{x^2-x+5}$; I = $\mathbb{R}$

16 g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 3x^2 - 4x + 7$.
Détermine la primitive G de g telle que G(1) = 3.

17 Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

$g(x)=\cos 3x-\dfrac{1}{2}\cos x$

Détermine la primitive G de g sur $\mathbb{R}$ telle que : $G\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

18 h est une fonction définie sur $]1;+\infty[$ par :

$h(x)=\dfrac{2x^3-7x^2+8x-1}{(x-1)^2}$

1. Détermine trois nombres réels a, b et c tels que pour tout $x > 1$, on a : $h(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x-1)^2}$.
2. Détermine la primitive H de h sur $]1;+\infty[$ telle que : H (2) = 0.

19 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que : $f(x)=x\sqrt{3-x}$.

1. Détermine D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Détermine trois nombres réels a, b et c tels que la fonction F définie par : $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{3-x}$ soit une primitive de f sur $D_f\setminus\{3\}$.
3. Déduis la primitive de f sur $D_f\setminus\{3\}$ qui s'annule en -1.

20

1. Démontre que pour tout nombre réel, $\sin^3(x) = \sin x - \sin x\cos^2 x$.
2. Détermine sur $\mathbb{R}$, les primitives de la fonction h définie par $h(x) = \sin^3(x)$.
3. Déduis la primitive de h sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur $\dfrac{2}{3}$ en π.

21 f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\cos^3 x\sin^6 x$.
Détermine une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

22 On considère la fonction f de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = E(x)$.
Justifie que f n'admet pas de primitive sur $[0;1]$.

23 On considère la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $F(x)= x|x|$.

Justifie que F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = 2|x|$.

24 Détermine dans chacun des cas suivants la primitive sur l'intervalle I de la fonction f qui prend la valeur b en a.

a) $f(x)=\dfrac{x^5+x^4+3x^2}{x^2}$; I = $]0;+\infty[$; $b = 0$ et $a = 1$.

b) $f(x) = 2x(x^3 + 2x)$; I = $\mathbb{R}$; $b = 0$ et $a = 0$.

c) $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$; I = $]0;\dfrac{\pi}{2}[$; $b = 1$ et $a=\dfrac{\pi}{4}$.

d) $f(x) = \cos(x)\sin^2(x)$; I = $\mathbb{R}$; $b = 0$ et $a = \pi$.

25 On considère les fonctions f, g et h définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \cos^4(x)$, $g(x) = \sin^4(x)$ et $h(x) = 2\cos^2(x)\sin^2(x)$.

1. On pose $m(x) = f(x) - g(x)$ et $n(x) = f(x) + g(x) + h(x)$.

Détermine les primitives respectives M et N sur $\mathbb{R}$ des fonctions m et n.

2. a) Exprime $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
   b) On pose $t(x) = f(x) + g(x) - 3h(x)$.
   Détermine une primitive T de t sur $\mathbb{R}$.
3. Déduis-les primitives F, G et H des fonctions f, g et h sur $\mathbb{R}$.

26 Détermine une primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = 3(3x + 1)^4$; 2. $f(x) = (2x + 7)^6$
3. $f(x) = (6x - 2)(3x^2 - 2x + 3)^5$; 4. $f(x) = \sin x\cos x$

27 Détermine une primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x)=\dfrac{4}{(1+4x)^2}$; 2. $f(x)=\dfrac{2}{(4-3x)^2}$;

3. $f(x)=\dfrac{4x-10}{(x^2-5x+6)^3}$.

28 Détermine une primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{4x+1}}$; 2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-7x}}$;

3. $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$; 4. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$.

29 Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x\sqrt{x}$.

1. Détermine la dérivée de la fonction g sur $]0\,;+\infty[$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Déduis de la première question une primitive F de f sur $]0\,;+\infty[$.

30 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{3x+4}{(x+1)^3}$.

1. Détermine les réels a et b tels que pour $x \neq -1$.
$$f(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^3}.$$
2. Déduis-en une primitive F de f sur $]-1\,;+\infty[$.

31 Soit la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{2x^3+5x^2-4x-7}{(x+2)^2}$$

1. Détermine les réels a, b et c tels que pour
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}.$$
2. Détermine la primitive F de f qui prend la valeur 3 en 0.

32 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x^2+6x+4}{(x+1)^2}$.

1. Détermine les réels a et b tels que :
$$f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2}.$$
2. Détermine la primitive F de f qui prend la valeur -1 en 2

33 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\cos^2(x)$ et $g(x) = (2x+1)\sin^2(x)$.

On pose $h(x) = f(x) + g(x)$.

Détermine la primitive H de h qui prend la valeur 0 en -1.

34 Soit g la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = \frac{3x^2+12x-1}{(x+2)^2}$$

1. Vérifie que pour tout x $]-2\,;+\infty[$:
$$g(x) = 3 - \frac{13}{(x+2)^2}.$$
2. Déduis-en la primitive G de g qui prend la valeur 4 en 1.

35 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \cos^2(x)$ et $g(x) = \sin^2(x)$.
On pose $m(x) = f(x) - g(x)$ et $n(x) = f(x) + g(x)$.

1. Détermine les primitives respectives M et N sur $\mathbb{R}$ des fonctions m et n.
2. Déduis-en les primitives des fonctions f et g.

36 On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{x^3+5x^2+7x+4}{x^2+2x+1}.$$

1. Justifie que $x^3+5x^2+7x+4 = (x+3)(x^2+2x+1)+1$.
2. Déduis-en une primitive F de la fonction f sur $]-\infty\,;-1[$.
3. Détermine la primitive G de f qui prend la valeur 5 en -2.

37 On considère la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par
$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}.$$

1. Détermine les réels a et b tels que :
$$f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$
2. Déduis-en la primitive F de f sur $]1\,;+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 2.

Situation complexe

38 Lors d'une expérience portant sur l'efficacité d'un bactéricide, des élèves introduisent ce produit dans un milieu nutritif où une population de bactéries croissait. La population a continué à croître pendant un certain temps mais elle s'est arrêté de croître et a commencé à décliner.
La taille de la population à l'instant t non nul est une fonction f dont la dérivée est donnée par :
$f'(t) = -10^3t^2 + 3\times10^4t + 10^4$ et telle que : $f(0) = 10^3$.
f(t) : représente le nombre de bactéries et t représente le temps en heures.
Selon cette expérience, le bactéricide est jugé efficace si après son introduction, le maximum de la population de bactéries est inférieur à 460000 .
Faisant partie de ce groupe d'élèves, tu es sollicité pour apprécier l'efficacité du bactéricide.
Propose à tes camarades, une solution argumentée basée sur tes connaissances en Mathématiques.

5 FONCTION LOGARITHME NÉPERIEN

Le logarithme permet d'exprimer le niveau sonore en fonction de l'intensité sonore.

Commentaire de la Leçon

La complexité croissante des calculs auxquels étaient confrontés les scientifiques, navigateurs ou astronomes a poussé très tôt à la recherche de techniques simplificatrices. L'idée directrice fut de remplacer les multiplications par des additions. Ainsi, quelques mathématiciens établirent à cet effet, dès le 16ème siècle, des tables de correspondance.

C'est à John NAPIER (ou NEPER) mathématicien écossais (1550-1617) que l'on doit le mot et le concept de logarithme dans sa : « Description de la stupéfiante règle des logarithmes » en 1614. Son but était la recherche d'une table de correspondance qui permette de simplifier les calculs en ramenant le calcul d'un produit à celui d'une somme. L'introduction de cette technique de calcul allait conduire à des études théoriques qui permirent de dégager la notion de **FONCTION LOGARITHME.**

L'élève aborde pour la première fois la notion de logarithme, l'enseignant devra la présenter avec précaution. Il a plusieurs possibilités de la présenter :

- approche historique ;
- approche avec la calculatrice ;
- approche avec l'utilisation des propriétés des primitives.

La représentation graphique de la fonction : $x \mapsto \ln x$ doit être connue des élèves car elle permet de retrouver de nombreux résultats (ensemble de définition, variation, signe, limites, valeurs particulières, branches paraboliques).

La bijectivité de la fonction logarithme népérien permettra d'introduire le nombre e.

La croissance « lente » de la fonction logarithme pourra être étayée avec des calculs numériques. Ce résultat sera réinvesti lors de l'étude des croissances comparées des fonctions logarithmes népérien, exponentielle et puissances.

La fonction logarithme joue un rôle capital en Mathématiques et dans maintes disciplines :

Physique, Chimie, Mécanique, Économie, Géographie, ...

Habiletés et Contenus

- **Connaitre** la définition de la fonction logarithme népérien ; la définition de la fonction logarithme décimal ; les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien ; la dérivée de la fonction logarithme népérien ; le sens de variation de la fonction logarithme népérien ; la représentation graphique de la fonction logarithme népérien ; les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal ; les limites de référence de la fonction logarithme népérien ; les fonctions dérivées des fonctions du type : $\ln \circ u$ et $\ln \circ |u|$; les primitives des fonctions du type : $\frac{u'}{u}$.
- **Noter** la fonction logarithme népérien ; la fonction logarithme décimal ; une fonction logarithme de base a ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$).
- **Résoudre** des équations ou inéquations faisant intervenir la fonction ln ; une équation de la forme $x^n = k$ ($k \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$) ; une inéquation d'inconnue n de la forme $q^n \geq a$ ou $q^n \leq a$ ($q \in \mathbb{R}_+^*$; $a \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$).
- **Déterminer** les fonctions dérivées des fonctions du type : $\ln \circ u$ et $\ln \circ |u|$; les primitives des fonctions du type : $\frac{u'}{u}$, où u est une fonction dérivable non nulle.
- **Représenter** graphiquement les fonctions du type : $\ln \circ u$ et $\ln \circ |u|$; graphiquement une fonction faisant intervenir la fonction logarithme népérien.
- **Utiliser** les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien pour transformer une écriture ; les limites de référence pour calculer d'autres limites.
- **Étudier** une fonction faisant intervenir la fonction logarithme népérien.
- **Traiter une situation** faisant appel aux fonctions logarithmes.

Situation d'Apprentissage

M. Agbéké a acheté une voiture neuve à 8.000.000 de francs CFA le premier Janvier 2020.

Le concessionnaire affirme que, compte tenu des innovations technologiques, cette voiture perdra 8% de sa valeur chaque année. M. Agbéké a décidé de donner sa voiture à sa fille Henriette lorsqu'elle vaudra moins que le quart de son prix initial. Au cours d'une discussion, ta camarade Larissa te demande de lui dire l'année à laquelle la voiture lui reviendra.

N'ayant pas la solution, tu poses le problème à tes camarades de classe.

Partageant le soucis d'Henriette, vous décidez d'exprimer la valeur de la voiture au bout de n années puis d'effectuer des calculs afin de répondre à sa préoccupation.

Activité 1 Définition de la fonction logarithme népérien

On se propose de chercher les fonctions f telles que :

- ✓ f est définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$.
- ✓ pour tous nombres réels a et b tels que : $a > 0$ et $b > 0$, $f(ab) = f(a) + f(b)$.

1. On pose : $a = b = 1$. Justifie que : $f(1) = 0$.
2. Soit $a > 0$ fixé. On définit la fonction g sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = f(ax) - f(x)$.
3. Justifie que g est une fonction constante.
   a) Justifie que g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.
   b) Justifie que : $g'(x) = af'(ax) - f'(x)$.
   c) Déduis-en que : $g'(1) = af'(a) - f'(1)$.

4) On pose : $f'(1) = k$.

Utilise les consignes 2) et 3), pour justifier que f est la primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{k}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$, qui s'annule en 1.

Récapitulons

Les fonctions f qui répondent au problème posé sont telles que :

- ✓ f est définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$
- ✓ f est la primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{k}{x}$ qui s'annule en 1 (k étant un réel).
- ✓ De telles fonctions sont appelées fonctions **logarithmes**.
- ✓ Pour $k = 1$, la fonction f est la primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 et f est appelé fonction logarithme népérien. Elle est notée : ln.
- ✓ L'image par la fonction ln d'un nombre réel strictement positif x est notée : ln x.

Exercice de fixation

1 Écris dans ton cahier le numéro de chacune des affirmations ci-dessous, suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. La fonction ln est définie sur $]-\infty ; 0[$. ; 2. $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$; 3. $\ln(1) = 2$; 4. $\ln'(6) = 3$.

Activité 2 Conséquences de la définition

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction ln.
2. Justifie que la fonction ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.
3. Donne la dérivée de la fonction ln puis son sens de variation.
4. Utilise le résultat pour compléter les phrases suivantes :

Pour tous réels strictement positifs a et b on a :

$a < b \Leftrightarrow \ln a \text{ ......} \ln b$;

$a = b \Leftrightarrow \ln a \text{ ....} \ln b$.

5. Calcule ln1.
6. Détermine le signe de $\ln x$ suivant les valeurs de x.

Récapitulons

- ✓ La fonction ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- ✓ La fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.
- ✓ Pour tous réels strictement positifs a et b on a :

  $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$;

  $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$.
- ✓ $\ln 1 = 0$.
- ✓ La fonction ln est positive sur $]1 ; +\infty[$ et négative sur $]0 ; 1[$.

Exercices de fixation

2 Écris dans ton cahier le numéro de chacune des affirmations ci-dessous, suivi de V si l'affirmation est vraie ou de faux si l'affirmation est fausse.

1. La fonction ln est définie sur $]-\infty ; 0[$;
2. $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$;
3. $\ln(1) = 2$
4. la fonction ln est positive sur $]0 ; 1[$
5. $\ln'(6) = 3$
6. $\ln 6 < \ln 10$
7. Si $0 < a < 7$, alors $\ln 7 < \ln a$.

3 Compare les nombres réels suivants :

a) $\ln 7$ et $\ln 5$; b) $\ln 29$ et $\ln 4\sqrt{5}$;

c) $\ln\sqrt{3}$ et $\ln \dfrac{1}{2}$.

Activité 3 Le nombre e

1. Justifie que la fonction ln est une bijection de $]0 ; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déduis-en que le nombre 1 possède un antécédent unique par la fonction ln.

Récapitulons

La fonction ln est une bijection de $]0 ; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Le nombre 1 possède donc un unique antécédent dans $]0 ; +\infty[$. On le note e. On a donc : $\ln e = 1$.

e est appelé la base du logarithme népérien. Une valeur approchée de e est : 2,718281828456.

Remarque

La notation e a été donnée par le mathématicien **EULER**. Il a démontré que ce nombre est irrationnel.

Activité 4 Propriété fondamentale

Soit $a > 0$

On considère la fonction $f :]0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \ln(ax)$$

1. Justifie que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ puis calcule sa dérivée.
2. Justifie que, pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$ on a : $f(x) = \ln a + \ln x$.

Récapitulons

Soit $a > 0$.

On a : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $\ln(ax) = \ln a + \ln x$.

Par extension en posant $x = b$, on a : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Exercice de fixation

4 Écris dans ton cahier le numéro de chacune des affirmations ci-dessous, suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. $\ln(2 \times 9) = \ln 2 + \ln 9$.
2. $\ln 12 = \ln(2 \times 7)$.
3. $\ln 8 + \ln 10 = \ln 80$.
4. $\ln e + \ln 5 = \ln(5 + e)$.

Activité 5 Conséquences de la propriété fondamentale

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs :

1. Justifie que $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$.
2. Justifie que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
3. Pour $a = b$, donne $\ln(a^2)$, puis généralise ce résultat.

Récapitulons

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, on a :

$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

Généralement, on admettra que pour tout nombre rationnel r, $\ln(a^r) = r\ln a$.

Exercices de fixation

5

1. Écris chacune des expressions suivantes sous la forme $\ln a$ où a est un nombre réel strictement positif.

a) $\ln 4 + \ln 7$; b) $\ln\sqrt{3} + \ln\sqrt{12}$; c) $\ln 7 - \ln 21$

2. Justifie que : $\ln(1+\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{2} - 1) = 0$

7 Écris chacune des expressions suivantes sous la forme $\ln a$, où a est un nombre réel strictement positif.

a) $\ln 4 + \ln 5$; b) $\ln\sqrt{3} + \ln\sqrt{12}$;

c) $\ln 8 + \ln \frac{1}{4}$.

6 Écris dans ton cahier le numéro de chacune des affirmations ci-dessous, suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	$\ln 72 = 3\ln 2 + 2\ln 3$
2	$\ln\left(\frac{32}{343}\right) = 4\ln 2 - 3\ln 7$
3	$\ln(0,8) = 2\ln 2 - \ln 5$
4	$\ln\left(\sqrt{\frac{1}{18}}\right) = -\frac{1}{2}\ln 2 + \ln 3$
5	$\ln(8^3) + \ln 2 = 7\ln 2$

Activité 6 Limites aux bornes de son ensemble de définition

1. Soit g la bijection réciproque de la fonction ln. On suppose que ln est majorée par un nombre réel M.
   a) Démontre que g(M + 1) est strictement positif.
   b) calcule ln [g(M + 1)] et déduis que ln n'est pas majorée.
   c) Détermine : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x$.
2. Soit x un nombre réel strictement positif.
   a) Écris ln x en fonction de ln $(\frac{1}{x})$
   b) Écris ln $(\frac{1}{x})$ comme la composée de deux fonctions.
   c) Déduis–en que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$.
   d) Interprète graphiquement ce résultat.
3. Dresse le tableau de variation de la fonction ln.

Récapitulons

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$

Activité 7 Représentation graphique de la fonction ln

On désigne par (C_{ln}) la courbe représentative de la fonction ln dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Justifie que les tangentes respectives à la courbe (C_{ln}) aux points I (1 ; 0) et A(e ;1) sont respectivement les droites : (T_I) : $y = x - 1$ et (T_e) : $y = \frac{x}{e}$.
2. On admettra que : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $\ln x < \frac{x}{e} < x$ et $\ln x < x - 1 < x$.
   Déduis de ces résultats la position relative de (C_{ln}) par rapport à (T_I) et à (T_e).
3. Démontre que : $\forall x \in]1 ;+\infty[$, $0 < \frac{1}{2}\ln x < \sqrt{x}$.
   a) Justifie que : $\forall x \in]1 ;+\infty[$, $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$.
   b) Déduis-en que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
   c) Interprète graphiquement le résultat.
4. Construis (C_{ln}) dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).
5. Dresse le tableau de variation de la fonction ln.

Récapitulons

- Les tangentes à (C_{ln}) aux points I(1 ;0) et A(e ;1) ont pour équations respectives :

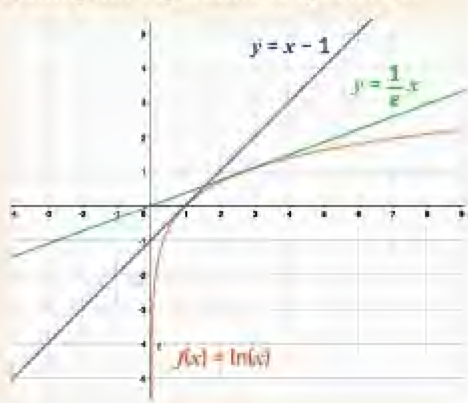
$y = x - 1$ et $y = \frac{x}{e}$.

(C_{ln}) est au-dessous de ces deux droites.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

La courbe (C_{ln}) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OI) en $+\infty$.

Représentation graphique de la fonction ln :



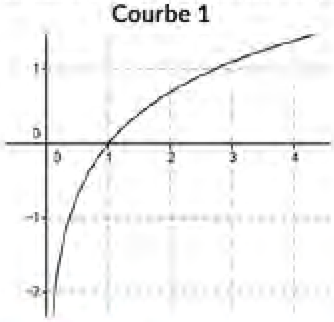
Exercices de fixation

8 (C) est la courbe représentative de la fonction ln. Interprète graphiquement les limites suivantes :

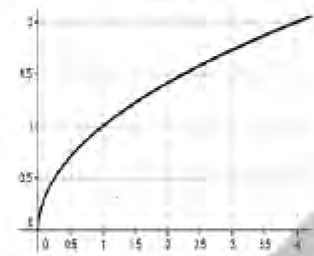
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{lnx}{x} = 0$.

9 Parmi les courbes suivantes, indique à l'aide du numéro, celle qui est la représentation graphique de la fonction logarithme népérien .

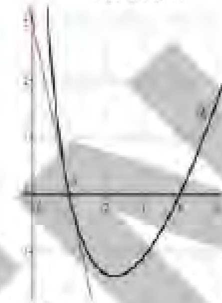
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



10 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x+\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

c) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(\ln x+\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Activité 8 Autres limites

1. a) Exprime $x\ln x$ en fonction de $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   b) Déduis-en $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} xlnx$.
2. Utilise le nombre dérivé de la fonction ln en 1 pour déterminer la limite en 1 de la fonction : $x\mapsto\dfrac{lnx}{x-1}$.
3. Utilise ce résultat pour calculer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

Récapitulons

On a obtenu les résultats suivants :

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} x\ln x=0$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$.

Exercices de fixation

11 Calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} x(1-\ln x)$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xlnx}{1+x}$; 3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{xlnx}{x-1}$.

12 Écris dans ton cahier le numéro de chacune des affirmations ci-dessous, suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{elnx}{x-1}=e$
2	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2lnx}{1+x}=0$
3	$\lim\limits_{x\to+\infty} xln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=1$

Activité 9 Équations et inéquations faisant intervenir la fonction ln.

1. On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation :
(E) : $x \in \mathbb{R}$, $\ln(3x-2) + \ln(x-1) = \ln(4x+2)$.
   a) Détermine l'ensemble de validité V de (E).
   b) Justifie que : $\forall x \in V$, l'équation (E) est équivalente à l'équation : $\ln[(3x-2)(x-1)] = \ln(4x+2)$
   c) Déduis-en les solutions de l'équation (E).
2. On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : (I) : $x \in \mathbb{R}$, $\ln(3x-2) + \ln(x-1) < \ln(4x+2)$
   a) Détermine l'ensemble de validité V de (I).
   b) Justifie que : $\forall x \in V$, l'inéquation (I) est équivalente à l'inéquation : $\ln[(3x-2)(x-1)] < \ln(4x+2)$
   c) Déduis-en les solutions de l'inéquation (I).

Récapitulons

- Pour résoudre une équation comportant des logarithmes, on peut utiliser la méthode suivante :
  - ✓ déterminer l'ensemble de validité V ;
  - ✓ se ramener à une ou plusieurs égalités de la forme : $\ln a = \ln b$.
- Pour résoudre une inéquation comportant des logarithmes, on peut utiliser la méthode suivante :
  - ✓ déterminer l'ensemble de validité V ;
  - ✓ se ramener à une ou plusieurs inégalités de la forme : $\ln a < \ln b$.

Exercices de fixation

13 Reproduis dans ton cahier et pour chaque ligne, marque une croix dans la case correspondant à la réponse correcte.

N°	Équations	Solutions		
1	$\ln x - 1 = 0$	0	1	e
2	$\ln(-x+1) = 0$	1	0	-1
3	$\ln(x+3) = 0$	-3	-2	-4

14 Reproduis dans ton cahier et pour chaque ligne, marque une croix dans la case correspondant à la réponse correcte.

N°	Inéquations	Solutions		
1	$\ln(-x) > 0$	$]1 ; +\infty[$	$]0 ; 1[$	$]-\infty ; -1[$
2	$\ln(-x+1) < 0$	$]0 ; +\infty[$	$]0 ; 1[$	$]1 ; +\infty[$
3	$\ln(x-2) < \ln x$	$]1 ; +\infty[$	$]2 ; +\infty[$	$\varnothing$

15 Détermine le plus petit entier naturel n, tel que : $1 - (\frac{3}{4})^n > 0,95$.

Activité 10 Fonctions du type : ln o u ou ln $|u|$

1. Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
   a) Justifie que la fonction ln ou est dérivable sur I.
   b) Justifie que $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$.
3. Soit v une fonction dérivable sur un intervalle J. On suppose que v ne s'annule pas sur J.
   a) Détermine le plus grand sous-ensemble J sur lequel la fonction $\ln \circ |v|$ est dérivable.
   b) Justifie que : $(\ln \circ |v|)' = \frac{v'}{v}$ (on pourra remarquer que : $\ln \circ |v| = \frac{1}{2} \ln(v^2)$).
   c) Déduis des questions précédentes les primitives de la fonction $\frac{v'}{v}$.

Récapitulons

La fonction ln o u est dérivable sur tout intervalle I, où la fonction u est dérivable et strictement positive et on a : $(\ln o\, u)' = \frac{u'}{u}$.

La fonction ln o $|u|$ est dérivable sur tout intervalle I, où la fonction u est dérivable et ne s'annule pas et on a : $(\ln o\, |u|)' = \frac{u'}{u}$.

Les primitives des fonctions de la forme $\frac{u'}{u}$ sont les fonctions de la forme ln o $|u| + c$, c étant une constante réelle.

Exercices de fixation

16 Reproduis dans ton cahier et pour chaque ligne, marque une croix dans la case correspondant à la réponse correcte.

N°	Expression de $f(x)$	Ensemble où la fonction f est dérivable		
1	$f(x) = \ln(2-x)$	$\mathbb{R}\setminus\{2\}$	$]-\infty\,;2[$	$]2\,;+\infty[$
2	$f(x) = \ln(-x)$	$]-\infty\,;0[$	$]0\,;+\infty[$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
3	$f(x) = \ln(\|3+x\|)$	$]-3\,;+\infty[$	$]-\infty\,;-3[$	$\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

17 Reproduis dans ton cahier le tableau ci-dessous.

Pour chaque ligne du tableau, entoure la réponse correcte parmi celles qui sont proposées.

N°	Expression de $f(x)$	Dérivées $f'(x)$		
1	$f(x) = \ln(2-x)$	$\frac{2}{2-x}$	$\frac{1}{2-x}$	$\frac{-1}{2-x}$
2	$f(x) = \ln(\|3x-1\|)$	$\frac{-3}{3x-1}$	$\frac{3}{3x-1}$	$\frac{1}{3x-1}$
3	$f(x) = \ln(-x)$	$\frac{1}{-x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{-2}{x}$

18 Écris le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. Une primitive sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{-2}{1-2x}$ est la fonction : $x \mapsto \ln(1-2x)$.
2. Une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{-1}{x}$ est la fonction : $x \mapsto \ln(|x|)$.
3. Une primitive sur $]-1\,;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{3}{x+1}$ est la fonction $x \mapsto \ln(x+1)+3$.
4. Une primitive sur $]2\,;+\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{2}{2-x}$ est la fonction : $x \mapsto \ln(2-x)$.

Activité 11 Fonction logarithme de base a ($a > 0$ et $a \neq 1$)

Soit k un nombre réel non nul. On considère la fonction f_k définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_k(x) = k\ln(x)$.

1. Justifie que f_k est une bijection $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
2. Justifie que f_k est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
3. Justifie que f_k vérifie la propriété fondamentale.
4. Soit a un réel strictement positif et différent de 1.
   a) Détermine la valeur de k pour que : $f_k(a) = 1$.
   b) Détermine la valeur de k pour que : $a = 10$.

Récapitulons

La fonction f_k qui correspond à la valeur $k = \dfrac{1}{\ln(a)}$ est appelée fonction **Logarithme de base a** .On la note $\log_a$.

Ainsi $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[$, $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Pour le cas particulier a =10, $k = \dfrac{1}{\ln(10)}$, cette fonction est appelée la fonction **logarithme** de **base 10 ou fonction logarithme décimal**. On la note : **log.**

Ainsi : log(10) =1 et log(1) = 0.

Exercice de fixation

19 Écris le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	Log(10) = 1.
2	L'ensemble de définition de la fonction log est : [0 ; + ∞[.
3	$\lim\limits_{x\to 0}\log(x) = 0$.
4	La fonction $x \longmapsto \log_2(x)$ est strictement croissante sur]0 ; + ∞[.
5	La fonction : $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(x)$ est strictement décroissante sur]0 ;+∞[.

20 Recopie dans ton cahier la seule bonne réponse : log (200) =.

a) 2 log (200) ; b) (log (100))² ; c) 100 log (2) ; d) log (2) + log (100)

21 Écris la lettre correspondant à la seule bonne réponse.

$\dfrac{\log(64)}{\log(4)} =$

a) 3 ; b) 16 ; c) log (60) ; d) log (16).

1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

Définition

On appelle fonction logarithme népérien la primitive sur $]0\ ;+\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui prend la valeur 0 en 1.
La fonction logarithme népérien est notée **ln**.

Conséquences

L'ensemble de définition de la fonction ln est : $]0\ ;+\infty[$.

La fonction ln est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$.

$\ln(1) = 0$

Exemple

- On a : $6 < 10$, donc $\ln(6) < \ln(10)$
- $\ln'(\frac{1}{3}) = 3$

Pour s'entraîner : Exercice 1

2. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Propriété fondamentale

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a :
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Exemple d'application

$\ln(4 \times 9) = \ln 4 + \ln 9$; b) $\ln(7\pi) = \ln 7 + \ln\pi$.

Pour s'entraîner : Exercice 2

Conséquences de la propriété fondamentale

Propriétés

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et pour tout nombre rationnel r , on a :

- $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$; • $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$; • $\ln(a^r) = r\ln a$.

Exemple d'application

- $\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3$; • $\ln\left(\frac{7}{4}\right) = \ln 7 - \ln 4$; • $\ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln 2$.

Pour s'entraîner : Exercice 5

3. ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN.

Sens de variation

La fonction ln est dérivable et strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$. Elle réalise une bijection de $]0\ ;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Nombre e

Définition

On appelle e, l'unique antécédent de 1 par la bijection ln, donc on a : $\ln e = 1$ et $\ln(\frac{1}{e}) = -1$.
e est appelé la base du logarithme népérien.
Une valeur approchée de e est : 2,718281828456.

› Remarque

La notation e a été donnée par le mathématicien **EULER**. Il a démontré que ce nombre est irrationnel.

Exemple d'application

$\ln(e^5) = 5\ln e = 5$, car $\ln e = 1$.
$\ln(e^2) + (\ln e)^2 = 2\ln e + (1)^2 = 2 + 1 = 3$.

Pour s'entraîner : Exercice 19

Limites de la fonction ln

Limites de référence

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Exemple d'application

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - \ln x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x}\times\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty, \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\ln x + \frac{1}{\ln x}\right) = -\infty, \text{ car } \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln x} = 0.$$

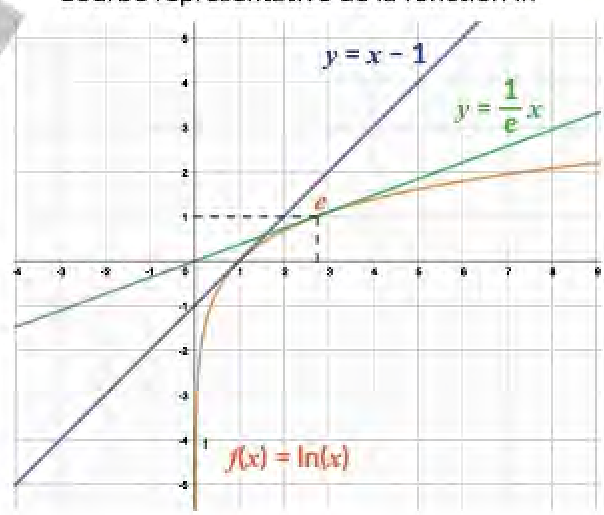
Pour s'entraîner : Exercices 9 ; 10 ; 11

Courbe représentative

Tableau de variation de la fonction ln.

x	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		+
lnx		$-\infty \nearrow +\infty$

Courbe représentative de la fonction ln



4. FONCTIONS DU TYPE : *ln u ou ln |u|*

Dérivée de ln u

Propriété

La fonction $\ln u$ où u est une fonction numérique est définie sur tout intervalle I sur lequel u est strictement positif v_e. De plus, si u est dérivable sur I, alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et on a : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

› Remarques

La fonction ln o |u| est dérivable sur tout intervalle I sur lequel u ne s'annule pas ; de plus on a : $(\ln o|u|)' = \frac{u'}{u}$.

Exemple d'application

Calculons la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I considéré.

a) $f(x) = \ln(5x - 2)$; $I = \left]\frac{2}{5} ; +\infty\right[$;

b) $f(x) = \ln(|2x - x^2|)$; $I =]2 ; +\infty[$.

On a :

a) pour tout x élément de I , on a : $f'(x) = \frac{5}{5x-2}$.

b) pour tout x élément de I , on a : $f'(x) = \frac{2-2x}{2x-x^2}$.

Pour s'entraîner : Exercices 12 ; 13

Primitive de $\frac{u'}{u}$

Propriété

- Soit u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle I.
- La fonction $\frac{u'}{u}$ admet pour primitives sur I les fonctions $\ln o|u| + c$ où c est une constante réelle.

Exemple d'application

Dans chacun des cas, déterminons les primitives de la fonction f sur l'intervalle I considéré.

a) $f(x) = \frac{2}{2x-3}$; $I = \left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$; b) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$; $I = \mathbb{R}$.

a) Les primitives sur I de f sont définies par : $\mathcal{F}(x) = \ln(2x - 3) + c$; c étant une constante réelle.

b) Les primitives sur I de f sont définies par : $\mathcal{F}(x) = \ln(x^2 + x + 1) + c$; c étant une constante réelle.

Pour s'entraîner : Exercice 14 ; 15

5. FONCTION LOGARITHME DE BASE a ($a > 0$ et $a \neq 1$)

Définitions

a est un nombre réel strictement positif et différent de 1.

On appelle fonction logarithme de base a, notée $\log_a$, la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.

On appelle fonction logarithme décimal, la fonction notée log définie sur]0 ; + ∞[par : $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

› Remarques

On a : log(10) = 1 et log(1) = 0.

Propriété

a est un nombre réel strictement positif et différent de 1.

Pour tous nombres réels x et y strictement positifs et pour tout nombre rationnel r , on a :

$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$; $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$; $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$; $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.

$\log_a(a)r = r$.

Exemple d'application

$\log_3(7\times4) = \log_3(7) + \log_3(4)$ donc $\log_3(28) = \log_3(7) + \log_3(4)$.

Pour s'entraîner : Exercices 16 ; 17

QUESTION 1

Comment déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition d'une fonction comportant des logarithmes ?

Méthode

Pour déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de telles fonctions, on peut procéder comme suit :

- transforme l'écriture de cette fonction si nécessaire ;
- met en évidence l'une des limites de référence.

Exercice

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$.
Calcule la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.

Solution commentée

Pour répondre à cette question, on va transformer l'écriture de $f(x)$ en mettant en évidence l'une des limites de référence.

- On a : $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$,

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

- On a : $f(x)=\dfrac{1}{x}(1+\ln x)$.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(1+\ln x)=-\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)=-\infty$.

Exercice non corrigé

On considère la fonction f definie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x)=2\ln x+\dfrac{1}{x}$.
Calcule la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.

QUESTION 2

Comment calculer $(\ln o\, u)'$, après avoir déterminé son ensemble de dérivabilité ?

Méthode

Pour traiter cette question, on peut procéder comme suit :

- on détermine l'ensemble de dérivabilité D de la fonction u ;
- on résout l'inéquation : $x\in$ D, $u(x)>0$;
- on applique la formule $(\ln o u)'=\dfrac{u'}{u}$.

Exercice

Détermine le plus grand ensemble (D) sur lequel la fonction g définie par : $g(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{2+x}\right)$ est dérivable, puis calcule $g'(x)$.

Solution commentée

Soit u la fonction rationnelle définie par :

$u(x) = (\frac{1-x}{2+x})$.

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$;

On résout l'inéquation : $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, $u(x) > 0$.

$x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, $u(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2 ; 1[$.

D =]−2 ; 1[.

On applique la formule : (ln ou)' = $\frac{u'}{u}$.

Pour $x \in]-2 ; 1[$, $u'(x) = \frac{-3}{(2+x)^2}$.

Donc : $\left(\frac{u'}{u}\right)(x) = \frac{\frac{-3}{(2+x)^2}}{\frac{1-x}{2+x}}$,

soit : $g'(x) = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$.

Exercice non corrigé

Soit k la fonction définie par : $k(x) = \ln(\sqrt{1-x^2})$.

Détermine le plus grand ensemble I sur lequel k est dérivable, puis calcule $k'(x)$ pour tout x élément de I.

QUESTION 3

Comment déterminer les primitives des fonctions du type $\frac{u'}{u}$?

Méthode

Pour traiter cette question, on peut procéder comme suit :

- on identifie la fonction u qui est le dénominateur ; son exposant doit être égal à 1.
- on calcule u'.
- on réécrit la fonction donnée en fonction de u et u'.
- on retrouve la forme $\frac{u'}{u}$.

Exercice

Détermine les primitives sur $]-\infty ; \frac{1}{5}[$ de la fonction f telle que : $f(x) = \frac{1}{5x-1}$.

Solution commentée

Ici, on pose que : $u(x) = 5x - 1$; on a : $u'(x) = 5$ d'où : $f(x) = \frac{1}{5}\times\frac{5}{5x-1} = \frac{1}{5}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$.

Donc les primitives sont les fonctions F définies par : $F(x) = \frac{1}{5}\ln(|5x-1|) + c$; $c \in \mathbb{R}$,

soit $F(x) = \frac{1}{5}\ln(1-5x) + c$; $c \in \mathbb{R}$, pour tout réel $x \in]-\infty ; \frac{1}{5}[$.

Exercice non corrigé

Détermine les primitives sur $]-\infty ; 1[$ de la fonction f telle que : $f(x) = \frac{x^2}{x^3-1}$.

Exercices de fixation

Définition et propriété algébriques de la fonction logarithme népérien.

1 Écris dans ton cahier le numéro de chaque (égalité ou inégalité) suivi de V si (l'égalité ou l'inégalité) est vraie ou de F si (l'égalité ou l'inégalité) est fausse .

1. $\ln(1) = e$; **2.** $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$;

3. $\frac{\ln(1)}{\ln(e)} = \ln(1-e)$; **4.** $\ln 5 > \ln 2 + \ln 3$;

5. $3\ln 2 < 2\ln 3$; **6.** $\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$.

2 Pour chacune des affirmations incomplètes, trois réponses A, B et C sont proposées. Une seule réponse est exacte. Recopie le numéro de chaque affirmation incomplète suivi de la lettre correspondante à l'affirmation correcte. Aucune justification n'est demandée.

N°	Affirmations incomplètes	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Soit a un réel strictement positif: $\ln\left(\frac{a^2}{16}\right) = ...$	$(\ln\frac{a}{4})^2$	$2(\ln a - \ln 4)$	$\frac{\ln a^2}{\ln 16}$
2	Pour tout réel a strictement positif, le nombre ln (3×a) est egal à :...	$\ln 3 \times \ln a$	$3 \times \ln a$	$\text{Ln}3 + \ln a$
3	Si x et y sont deux nombres strictement positifs, alors...	$\ln(x^2y^2) = 2\ln x - \ln y$	$\ln\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(y)$	$\ln(x+y) = \ln x + \ln y$

Équations et inéquations comportant des logarithmes

3 Résous dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $\ln(1-x) = 0$; b) $\ln(4-x) = \ln(x-1)$;
c) $\ln(x^2 - 5x + 4) = \ln(x^2 - x - 6)$.

4 Résous dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$(x^2 - 1)\ln x = 0$; b) $\ln(x+5) = 2\ln 2 - \ln(x-2)$; c) $\ln x = 1$.

5 Pour chacune des affirmations incomplètes, trois réponses A, B et C sont proposées. Une seule réponse est exacte. Recopie le numéro de chaque affirmation incomplète suivi de la lettre correspondante à l'affirmation correcte. Aucune justification n'est demandée.

N°	Informations incomplètes	Réponse A	Réponse B	Réponse C
01	La fonction $x \longmapsto \ln(-x)$ est définie sur	$]-\infty ; 0[$	$]-\infty ; -1[$	$]0 ; +\infty[$
02	La fonction $x \longmapsto \ln(4-x^2)$ est définie sur	$]-\infty ;-4[\cup]4 ;+\infty[$	$]-4 ;4[$	$]-\infty ;-4[$
03	La fonction $x \longmapsto \ln(\lvert x\rvert)$ est définie sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}^*$

6 Dans chacun des cas suivants, détermine l'ensemble de définition de la fonction f.

a) $f(x) = \ln(x^2)$; b) $f(x) = \ln[x(x+2)]$; c) $f(x) = \ln x - \ln(2x)$.

Inéquations comportant des logarithmes

7 Résous dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

a) $\ln(2+3x) < \ln(x-1)$; b) $\ln(-x) \geq 0$.

8 Résous dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

a) $\ln(1-x^2) > 1$; b) $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$.

Limites de référence et limites aux bornes de l'ensemble de définition d'une fonction comportant des logarithmes

9 Pour chacune des affirmations, trois réponses sont proposées. Une seule réponse est exacte .Recopie le numéro de chaque affirmation ainsi que la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

N°	Affirmations	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Si $f(x) = 1+\ln x$, alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ...$	1	$+\infty$	$-\infty$
2	Si $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ...$	0	$+\infty$	1
3	$\lim\limits_{x\to 0}\left(x + \frac{1}{\ln x}\right) = ..$	0	$+\infty$	$-\infty$
4	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = ...$	-1	1	0

10 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \ln x)$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}$.

11 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x$.

Dérivée d'une fonction comportant des logarithmes.

12 Pour chacune des affirmations, trois réponses sont proposées. Une seule réponse est exacte. Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de la lettre correspondante à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.

N°	Affirmations	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Soit la fonction g et dérivable sur $]2\,;+\infty[$ et définie par : $g(x) = \ln(3x-6)$ Pour tout $x \in]2\,;+\infty[$.	$g'(x) = \frac{1}{3x-6}$	$g'(x) = \frac{3}{3x-6}$	$g'(x) = \frac{3}{\ln(3x-6)}$
2	Soit la fonction f dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par : $f(x) = 5\ln x - x$	$f'(x) = \frac{5}{x} - x$	$f'(x) = \frac{5}{x} - 1$	$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$
3	Soit h la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = \ln(x^2+3)$	$h'(x) = \frac{2}{x^2+3}$	$h'(x) = \frac{1}{x^2+3}$	$h'(x) = \frac{2x}{x^2+3}$

13 On suppose que chacune des fonctions définies ci-dessous, est dérivable sur un ensemble donné. Détermine pour chacune d'elles, sa dérivée.

a) $f(x) = \ln(2x-4)$; b) $g(x) = \ln(x^2)$; c) $h(x^2 - 2x + 4)$

Primitives d'une fonction du type $\frac{u'}{u}$

14 Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives de la fonction f sur l'intervalle K .

a) $f(x) = \frac{1}{x-4}$ et K =] 4 ; + ∞[.

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^3-1}$ et K =]−∞ ;1[.

c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ et K =] 0 ; + ∞[.

d) $f(x) = \frac{1}{3x+1} + \frac{5}{x-2}$ et K=]−∞ ;−1[.

15 Pour chacune des affirmations, trois réponses sont proposées. Une seule réponse est exacte. Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de la lettre correspondante à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.

N°	Affirmations	Réponse A	Réponse B	Réponse C
01	Une primitive F sur $]\frac{1}{5}\,;+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{5x-1}$ est	$F(x) = 5\ln(5x-1)$	$F(x) = \ln(5x-1)$	$F(x) = \frac{1}{5}\ln(5x-1)$
02	Une primitive G sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+1}{x}$ est :	$G(x) = \frac{\ln(x-1)}{\ln x}$	$G(x) = x - e + \ln x$	$G(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$
03	Une primitive H sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction h définie par $h(x) = \ln x$ est :	$H(x) = \frac{1}{\ln x}$	$G(x) = x\ln x - x + e$	$G(x) = \ln\frac{1}{x} + l$

Définition et propriété de la fonction logarithme de base a

16 Reproduis et réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations suivantes.

N°	Affirmations	Réponses
1	$\log(1) = 0$.	
2	L'ensemble de définition de la fonction log est : $[0\,;+\infty[$.	
3	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log(x)}{x} = +\infty$.	
4	$\lim\limits_{x\to 0}\log(x) = 0$.	
5	La fonction $x \longmapsto \log_2(x)$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.	
6	La fonction $x \longmapsto \log_{\frac{1}{2}}(x)$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.	

17 Écris sous la forme $\log_a(b)$.

a) $\log_2(4) + \log_2\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) $\log_3(9) - \log_3(27)$.

c) $\log_4(5) + \log_4(8)$.

Exercices de renforcement /Approfondissement

18 Simplifie les sommes suivantes :

a) $\ln(1+\sqrt{3})+\ln(\sqrt{3}-1)$.

b) $\ln(2+\sqrt{3})+\ln(2-\sqrt{3})$.

c) $\ln 2+\ln\left(2+\sqrt{2}\right)+\ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)+\ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$.

19

1. Calcule : $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$; $\ln(\sqrt{e})$; $\ln(e\sqrt{e})$; $\ln\left(\frac{e\sqrt{e}}{e}\right)$.
2. Simplifie : $\ln(e^3)-\ln(e^2)$; $5\ln\left(\frac{1}{e}\right)+4\ln(e\sqrt{e})$.

20

1. Calcule la limite de la fonction f en $+\infty$, dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}$; b) $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

c) $f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; d) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$.

2. Calcule la limite de la fonction f en 0 dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=\dfrac{\ln x-2}{\ln x+1}$; b) $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$;

c) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$.

21

1. Justifie que pour tout nombre réel x :
$2x^3-3x^2-3x+2=(x+1)(2x^2-5x+2)$.
2. Déduis-en la résolution dans $\mathbb{R}$ de :
   a) (E) : $2\ln^3(x-1)-3\ln^2(x-1)-3\ln(x-1)+2=0$.
   b) (I) : $\ln(3x-2)-\ln(2x-3)\leq 2\ln x$.

22 Résous dans $\mathbb{R}^2$, les systèmes d'équations suivantes :

a) $\begin{cases}-\ln x+2\ln y=4\\ 3\ln x+\ln y=-5\end{cases}$; b) $\begin{cases}\ln(x+y)=0\\ xy=-2\end{cases}$; c) $\begin{cases}\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{\ln y}=\dfrac{7}{3}\\ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{7}{2}\end{cases}$

23 Résous dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes :

a) $(x-2)\ln(x-2)=0$; b) $\ln(x+2)+\ln(x-2)=\ln(45)$;

c) $\ln(x+4)+\ln(x-2)=\ln(5x-4)$;

d) $\ln(|x+1|)+\ln(|x+5|)=\ln 15$.

24 Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$\ln(2-3x)\geq 0$; b) $\ln(2x-e)\geq 1$;

c) $\ln(2-x)+\ln(x+4)>\ln(3x+2)$; d) $\ln(x+2)\leq\ln(x^2-4)$.

25 Détermine la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=\ln\dfrac{\ln(2x)}{x}$; b) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\ln(\sqrt{x})$;

c) $f(x)=(1-x)\ln(1-x)$; d) $f(x)=x^2+\dfrac{2+\ln x}{x}$;

e) $f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

26 Dans chacun des cas suivants, détermine la primitive sur K de la fonction f qui prend la valeur x_0 en y_0.

a) $f(x)=\dfrac{5}{3-2x}$; K = $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$; $x_0=2$ et $y_0=-3$.

b) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$; K = $]1;+\infty[$; $x_0=e^2$ et $y_0=2\ln 2$.

c) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$; K = $]0;+\infty[$; $x_0=e$ et $y_0=\dfrac{3}{2}$.

27 On considère la fonction numérique f définie sur $K=]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{-3x^2+17x-4}{3x^2-4x+1}$.

1. Détermine trois nombres réels a, b et c tels que : pour tout x élément de K,
$f(x)=a+\dfrac{b}{1-3x}-\dfrac{c}{1-x}$.
2. Déduis-en la primitive F de f sur K qui prend la valeur $\dfrac{\ln(25)}{3}$ en 2.

28 On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x)=\dfrac{x\ln x}{1-x}$.

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Justifie que l'on peut prolonger par continuité la fonction f en 0 et en 1.
3. Notons g ce prolongement. Étudie la dérivabilité de g en 0 et 1.
4. Interprète graphiquement ce résultat.

29 On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x + \ln|1 - x|}{1 - x}.$$

1. Soit x un nombre réel différent de 1 :

   Calcule $f(1 + x) + f(1 - x)$.

2. Justifie que la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé admet un centre de symétrie dont tu préciseras les coordonnées.

30 Amine place un capital de 500.000F CFA à intérêts composés au taux annuel de 6%. Il envisage acheter un terrain dont le cout est estimé à 1.250.000F CFA. Détermine le nombre d'années à partir duquel le capital acquis permettra à Amine d'acheter ce terrain.

31 On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2 \text{ si } x > 0 \text{ et } h(0) = 0.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de h dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. a) Calcule de $\frac{h(x)}{x}$ en 0.

   b) Étudie la dérivabilité de h en 0.

   c) Détermine la limite de h en 0.

   d) Détermine la limite de $\frac{h(x)}{x}$ en $+\infty$

   e)Interprète graphiquement les résultats précédents.
2. a)Justifie que, pour tout $x > 0$, $h'(x) = x(\ln x - 1)$.

   b) Étudie les variations de h.

   c)Dresse son tableau de variations.
3. Détermine les points d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses.
4. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
5. Construis (T) et (C) dans le repère (O ; I ; J).

32 Le niveau sonore exprimé en décibels et l'intensité sonore exprimée en Watt /m² sont liés par la relation: S(en décibels) = 10log ($\frac{I}{I_0}$), où I désigne l'intensité sonore et $I_0 = 10^{-12}$ Watt/m². (I_0 est le seuil d'audibilité par l'oreille humaine).

Application :
Une conversation a une intensité de $10^4\ I_0$.
Détermine en décibels son niveau sonore.

1. Détermine l'intensité correspondant à niveau sonore de 100 décibels.
2. Détermine la façon de réduire l'intensité d'un son pour abaisser le niveau sonore de 1 décibel.

33 Pour évaluer la puissance d'un séisme, on a défini une quantité, appelé magnitude, liée à l'énergie développée au foyer du séisme. L'échelle de magnitude, ou échelle de **RICHTER**, permet de comparer les énergies développées par différents séismes :

- un séisme de magnitude 3 correspond à une secousse ressentie sur une surface peu étendue ;
- un séisme de magnitude de 4,5 peut causer des dégâts légers et de magnitude 6 des dégâts importants ;
- les plus grands séismes enregistrés ont une magnitude comprise entre 7 et 8,5 ;
- on estime que le séisme de plus forte magnitude, voisine de 9, a été celui de Lisbonne, en 1755.

L'énergie libérée au foyer d'un séisme étant notée E, la magnitude correspondante M est donnée par la formule: log E = 11,4 + 1,5M.

1. Compare les puissances de deux séismes de magnitudes respectives 3 et 7.
2. Calcule la magnitude du séisme de Skopje, en 1963, sachant que l'énergie libérée a été 1000 fois supérieure à celle libérée par un séisme de magnitude 4.
3. Compare les puissances des séismes de Skopje (M = 6) et de Los Angeles (M = 7,5), en 1971, à celui de Lisbonne (M = 9) en 1755.

34 Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

Partie I : Étude d'une fonction g

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
$g(x) = x\ln x - x + 1$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère (O, I, J).

1. Étudie les limites de g en 0 et $+\infty$.

On suppose que g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

2. a) Étudie les variations de g.

   b) Déduis-en le signe de $g(x)$ en fonction de x.

Partie II : Étude d'une fonction f

Soit f la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\ln x.$$

1. Étudie les limites de f en $+\infty$ et en 1.
   Pour l'étude de la limite en 1 ; on pourra utiliser un taux d'accroissement. On suppose que f est dérivable sur $]1 ; +\infty[$.

2. Dresse le tableau de variation de f.
   On pourra remarquer que $f'(x)$ s'écrit facilement en fonction de $g(x)$.
3. Trace la courbe représentative (C_f) de f dans le repère (O, I, J).

Partie III : Étude de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$

1. Démontre que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution notée α et que $3{,}5 < \alpha < 3{,}6$.
2. Soit h la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par :
   $$h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$
   a) Démontre que α est solution de l'équation : $h(x) = x$.
   b) Étudie le sens de variation de h.
   c) On pose I = [3 ; 4].
   Démontre que pour tout x élément de I, on a :
   $h(x) \in$ I et $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$.
3. On définit pour tout nombre entier naturel n, la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$.
   Justifie successivement les trois propriétés suivantes :
   a) Pour tout nombre entier naturel n,
   $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6}|u_n - \alpha|$.
   b) Pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
   c) La suite (u_n) converge vers α.
4. Détermine un nombre entier naturel p, tel qu'à partir des majorations précédentes, on puisse déduire que u_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
   Indique une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.

Situations complexes

35 Lors d'un festival de musique organisé à l'intention des meilleurs élèves d'une classe de terminale, les organisateurs utilisent une sono qui donne 110 décibels au premier rang des invités à 10 m. Estimant le niveau sonore trop élevé, les riverains situés à 500 m du lieu du spectacle ne souhaitent pas recevoir un niveau sonore supérieur à 70 décibels.

Monsieur Konan, organisateur principal du spectacle souhaite vérifier si le niveau sonore perçu par les riverains est conforme à leur vœu. Il se tourne vers toi.
A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de Monsieur Konan.
NB : le niveau sonore exprimé en décibels et l'intensité sonore exprimée en Watt/m² sont liés par la relation :

S (en décibels) = 10log ($\frac{I}{I_0}$) où I désigne l'intensité sonore et $I_0 = 10^{-12}$ Watt/m²
L'intensité sonore est inversement proportionnelle au carré de la distance.

36 Dans le cadre de la lutte contre le réchauffement climatique, un pays décide de réduire de 8% chaque année sa consommation de charbon estimée en 2019 à 10.000 tonnes.
Lors d'une conférence de presse, le Ministre des Eaux et Forets estime que cette lutte sera considérée comme gagnée si le pays réduit avant l'année 2030, sa consommation de charbon à moins de 2000 tonnes.
Ayant assisté à cette conférence de presse, ton papa sceptique, te demande si le pays gagnera la lutte contre le réchauffement climatique.
Donne ton avis en le motivant par tes connaissances mathématiques.

37 M. Kouassi a acheté une voiture neuve à 8.000.000 de francs CFA le premier Janvier 2020.
Le concessionnaire affirme que, compte tenu des innovations technologiques, cette voiture perd 8 % de sa valeur par an.
M. Kouassi a décidé de donner sa voiture à sa fille Henriette lorsqu'elle vaudra moins du quart de son prix initial. Henriette, étant impatiente, se demande en quelle année la voiture lui reviendra. N'ayant pas la solution, elle te pose son problème.
À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de ta camarade Henriette.

6 NOMBRES COMPLEXES

Commentaire de la Leçon

Les nombres complexes naissent au 16e siècle dans les travaux des mathématiciens italiens qui cherchent une méthode de résolution des équations du 3e degré.

Dans les premières années du 16e siècle, le mathématicien italien Scipione del Ferro, professeur de mathématiques à l'université de Bologne est le premier à trouver une méthode permettant de résoudre certaines équations du 3e degré. Longtemps, il conserve secrète sa méthode (comme il est coutume de le faire à l'époque) puis finit par la communiquer à son gendre, Annibal de la Nave, lui aussi mathématicien.

Tout au long du 17e siècle, les nombres complexes ne cessèrent de disparaître et de réapparaître. Des mathématiciens aussi brillants que Leibniz et Jean Bernoulli s'engagent dans des controverses épistolaires sur ces nouveaux nombres. C'est vraiment seulement au 18e siècle que leur emploi se généralise et qu'ils sont véritablement réhabilités après que les mathématiciens apprirent à les représenter dans le plan.

L'étude des nombres complexes est nouvelle en classe de terminale. Jusqu'en classe de Première, le plus grand ensemble de nombres étudié est l'ensemble des réels.

Les nombres complexes prolongent $\mathbb{R}$ et offrent un domaine riche d'activités numériques. Il ne s'agit pas de faire une théorie sur les nombres complexes mais de les utiliser pour résoudre des problèmes. On s'interdira d'utiliser le symbole $\sqrt{}$ avec un nombre complexe qui n'est pas un réel positif. L'écriture exponentielle sera utilisée le plus tôt possible afin d'alléger les expressions dans les calculs.

A titre d'exercice, on pourra faire démontrer aux élèves que A, B, C et D étant quatre points distincts d'affixes respectives a, b, c et d. Les points A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si

$\arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) = \arg\left(\dfrac{d-b}{d-a}\right) + 2k\pi$ où k est un entier relatif.

Pour la linéarisation des puissances de cosinus et de sinus, on se limitera à des exposants inférieurs ou égaux à 5. Les formules de trigonométrie obtenues ne sont pas à apprendre par cœur mais à retrouver.

Habiletés et Contenus

- ✓ **Identifier** la partie réelle ; la partie imaginaire d'un nombre complexe, la forme algébrique d'un nombre complexe, la forme trigonométrique d'un nombre complexe, la forme exponentielle d'un nombre complexe.
- ✓ **Connaître** la définition du module ; d'un argument d'un nombre complexe, les propriétés relatives au module et un argument du produit, de l'inverse, du quotient et de la puissance entière d'un nombre complexe, les propriétés relatives à la somme, au produit et au quotient de deux nombres complexes, la définition du conjugué d'un nombre complexe, les propriétés relatives au conjugué d'un nombre complexe, la propriété relative à l'égalité de deux nombres complexes, l'affixe d'un point ; d'un vecteur ; le point image ; le vecteur image d'un nombre complexe, la définition d'une racine carrée d'un nombre complexe, la définition d'une racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe non nul, les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité, la formule de Moivre, la formule d'Euler, les caractérisations complexes d'un cercle ; d'une droite ; d'une demi-droite.
- ✓ **Déterminer** la forme algébrique, la forme trigonométrique d'un nombre complexe, la partie réelle, la partie imaginaire d'un nombre complexe, le conjugué d'un nombre complexe, le module et un argument d'un nombre complexe non nul, des lieux géométriques à l'aide des nombres complexes, les racines carrées d'un nombre complexe, les racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe non nul.
- ✓ **Calculer** la somme, le produit et le quotient de deux nombres complexes, la puissance d'un nombre complexe.
- ✓ **Linéariser** des puissances de $\cos x$ et $\sin x$.
- ✓ **Résoudre** une équation du second degré à coefficients complexes ainsi que des équations s'y ramenant, une équation se ramenant du second degré à coefficients complexes.
- ✓ **Placer** les points images des racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexes, sur le cercle trigonométrique, connaissant l'une d'elles.
- ✓ **Utiliser** les formules de Moivre et d'Euler pour transformer des produits en somme dans des expressions trigonométriques.
- ✓ **Traiter une situation** faisant appel aux nombres complexes.

Situation d'Apprentissage

Après avoir participé à un concours de mathématiques, un élève propose à sa classe une des questions qui lui avait été posée à ce concours : « Détermine un nombre dont le carré est égal à – 5 ».
Certains élèves estiment qu'un tel nombre n'existe pas, tandis que d'autres pensent le contraire.
Ils exposent cette préoccupation au professeur de mathématiques. Celui-ci profite de cette occasion pour étudier un nouvel ensemble obtenu grâce à une extension de l'ensemble des nombres réels.

Activité 1 Ensemble des nombres complexes – Forme algébrique d'un nombre complexe

On veut trouver deux nombres x et y tels que leur somme soit égale à 10 et leur produit à 40.

« Au milieu du XVIᵉ siècle, Cardan donne des solutions de l'équation correspondant à ce problème : $5+\sqrt{-15}$ et $5-\sqrt{-15}$. Il nomme ces quantités " quantités sophistiquées". Plus tard, au XVIIᵉ siècle, Descartes les nommera " quantités imaginaires". Au XVIIIᵉ siècle, Euler introduit une nouvelle notation ; il pose i le nombre tel que $i^2 = -1$ ».

1. Justifie que le problème peut se traduire par l'équation $x \times (10 - x) = 40$ et $x + y = 10$.
2. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x(10 - x) = 40$.
3. En admettant que les quantités $5+\sqrt{-15}$ et $5-\sqrt{-15}$ de Cardan existent, démontre qu'elles vérifient bien l'équation.
4. On pose i le nombre tel que $i^2 = -1$.
   a) Déduis-en que i est une solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$.
   b) Détermine la valeur de i^4.
5. En utilisant le nombre i, détermine un nombre qui :
   a) Élevé au carré est égal à -4 ; **b)** élevé au carré est égal à -2 ; **c)** élevé au carré est égal à -15.
6. En utilisant le résultat de la question 5-c), réécris les solutions proposées par Cardan en utilisant le nombre i.

Récapitulons

- L'ensemble $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes, est le plus grand ensemble des nombres contenant l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
- i est un élément de $\mathbb{C}$ où i est solution de l'équation : $x^2 + 1 = 0$, c'est-à-dire : $i^2 = -1$.
- On admet que tout nombre complexe z s'écrit de façon unique $z = a + ib$ où a et b sont des nombres réels. Le réel a, appelé partie réelle de z, est noté Re(z). Le réel b, appelé partie imaginaire de z, est noté Im(z). Cette écriture de z est appelé la forme algébrique du nombre complexe z.

Exercice de fixation

1 Recopie le tableau ci-dessous dans ton cahier et indique par une croix si le nombre de la ligne appartient à l'ensemble donné.

Nombres	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
3						
-4						
2,25						
$-6,1258$						
$\frac{2}{3}$						
$-6,666...$						
$3i$						
$\sqrt{3}$						
$i\sqrt{3}$						
$1+3i$						
$\frac{2}{3}i$						

2 Indique la partie réelle et la partie imaginaire de chaque nombre complexe suivant :

$2i$; -10 ; $1 + 3i$; 0 ; $-5i$.

Activité 2 Égalité de deux nombres complexes

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' des réels.

Justifie que : $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

Récapitulons

a, b, a' et b' sont des nombres réels.

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

$z = z' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.

Exercice de fixation

3 Soit x un nombre réel et soit le nombre complexe $1 + xi$.

Déterminons x pour que : $1 + xi = 1 + 2i$.

Activité 3 Opposé d'un nombre complexe

Soit a et b deux nombres réels et $z = a + ib$ un nombre complexe.

Justifie qu'il existe un nombre complexe z' tel que $z + z' = 0$.

Récapitulons

a et b sont deux nombres réels. $z = a + ib$ est un nombre complexe.

L'opposé de z est le nombre complexe noté $-z$ tel que : $-z = -a - ib$.

Exercice de fixation

4 Détermine l'opposé de chacun des nombres complexes suivants : $-3i$; $2 + 5i$; 5.

Activité 4 Somme de deux nombres complexes, multiplication de deux nombres complexes.

Soit z et z' deux nombre complexes tels que : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' des nombres réels.

1. Donne Re(z), Im(z), Re(z') et Im(z').
2. Calcule $z + z'$ et fais une conjecture.
3. Calcule $z \times z'$ et fais une conjecture.

Récapitulons

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' des nombres réels. On a :

- $z + z' = a + a' + i(b + b')$.
- $z \times z' = (a \times a' - b \times b') + i(a \times b' + b \times a')$.

Exercice de fixation

5 Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que : $z_1 = 3 - 2i$ et $z_2 = -4 + 5i$.

Détermine la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a) $z_1 + z_2$; b) $z_1 \times z_2$; c) $3z_1$; d) z_2^2 .

Activité 5 Inverse d'un nombre complexe

1. a) Détermine la forme algébrique de $(3 + 2i)(3 - 2i)$.
   b) En multipliant le dénominateur et le numérateur par $3 - 2i$, détermine la forme algébrique de $A = \frac{1}{3+2i}$.
2. Soit a et b deux réels.
   a) Détermine la forme algébrique du nombre complexe : $(a + ib)(a - ib)$.
   b) En multipliant le numérateur et le dénominateur par : $a - ib$, détermine la forme algébrique du nombre complexe A tel que : $A = \frac{1}{a+ib}$ $(a, b) \neq (0, 0)$.

Récapitulons

Si $z = a + ib$ avec a et b deux nombres réels et $z \neq 0$, alors $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \times \frac{b}{a^2+b^2}$.

Exercice de fixation

6

a) Écris le nombre complexe $Z_1 = \frac{2}{3i}$ suivant sous forme algébrique.

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(3 - 2i)z - 2i = i$. Tu écriras la solution sous la forme algébrique.

Activité 6 Puissance entière d'un nombre complexe

On considère le nombre complexe z tel que : $z = 1 + 2i$

Écris sous la forme algébrique chacun des nombres complexes: z^2 ; z^5 ; $\frac{1}{z^2}$.

Récapitulons

On admet :

Soit z un nombre complexe et n un nombre entier non nul. On a :

- $z^{n+1} = z^n \times z$;
- si z est non nul, $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$;
- $z^0 = 1$.

Exercice de fixation

7 Calcule et écris sous la forme algébrique chacun des nombres complexes : $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5$; $(1 + i)^{-4}$.

Activité 7 Conjugué d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels.
Soit z' le nombre complexe défini par : $z' = a - ib$.

1. Détermine la forme algébrique de : $z + z'$; $z - z'$ et $z \times z'$.
2. Détermine une condition sur z et z' pour que :
   a) z soit un nombre réel,
   b) z soit un nombre imaginaire pur.

Récapitulons

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels.

- On appelle conjugué de z, le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par : $\overline{z} = a - ib$.
- Le nombre complexe $\overline{z}$ tel que $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$ est appelé le conjugué de z.
- Pour tout nombre complexe z, $\overline{\overline{z}} = z$.

Exercice de fixation

8 Détermine le conjugué des nombres complexes suivants : $1 - 3i$; 6 ; $4i$; $3 + 5i$.

Activité 8 Produit nul

Soit z et z' deux nombres complexes.
Démontre que $z \times z' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$.

Récapitulons

Soit z et z' deux nombres complexes.
$zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$.

Exercice de fixation

9 Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z + 3 - 5i)(3z - 5 + i) = 0$.

Activité 9 Module d'un nombre complexe

Soit $z_1 = 2 + 5i$ et $z_2 = -1 + 2i$.

a) Calcule $z_1 \times \overline{z}_1$ et $z_2 \times \overline{z}_2$.

b) Déduis-en la valeur de $\sqrt{z_1 \times \overline{z}_1}$ et $\sqrt{z_2 \times \overline{z}_2}$.

c) Soit $z = a + ib$ (a et b étant des nombres réels) un nombre complexe.
Détermine $z \times \overline{z}$ en fonction de a et de b.

Récapitulons

- Le réel positif $\sqrt{z_1 \times \overline{z}_1}$ est appelé module de z_1 et est noté $|z_1|$
- Soit $z = a + ib$ (a et b étant des nombres réels) un nombre complexe.
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

On admettra que :

✓ $|\overline{z}| = |-z| = |z| = |-\overline{z}|$;

✓ $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Soit z et z' deux nombres complexes.

✓ $|z.z'| = |z|.|z'|$;

✓ Pour $z' \neq 0$, $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$;

✓ Pour $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Exercice de fixation

10 Calcule le module de chacun des nombres complexes suivants :

$-2 + 3i$; $1 + i$; $1 - i\sqrt{3}$; -2.5 ; $4{,}2015$; $-2i$; $2021i$.

Activité 10 Affixe, Point-image, Vecteur-image

On considère les quatre nombres complexes $z_1 = -2 + i$; $z_2 = -2i$; $z_3 = 5$ et $z_4 = 3 + 3i$.

À chacun de ces nombres complexes, on associe un point M de coordonné $(x_M ; y_M)$ tel que $x_M = \mathrm{Re}(z)$ et $y_M = \mathrm{Im}(z)$.

Soit A le point associé au nombre complexe z_1 tel que : $z_1 = -2 + i$.

B le point associé au nombre complexe z_2 tel que : $z_2 = -2i$.

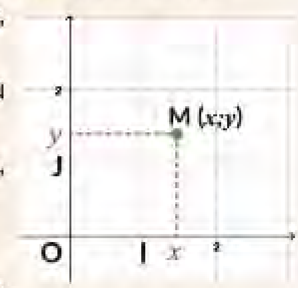
C le point associé au nombre complexe z_3 tel que : $z_3 = 5$.

D le point associé au nombre complexe z_4 tel que : $z_4 = 3 + 3i$.

1. Place ces points dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).
2. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Récapitulons

- On appelle plan complexe le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J)
- À tout nombre complexe $z = x + iy$, où x et y sont des réels, on associe le point $M(x;y)$.
- On dit que M est le point image de z et que z est l'affixe du point M et on note $M(z)$.
- À tout nombre complexe $z = x + iy$, où x et y sont des réels, on associe le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le plan complexe.
- On dit que $\vec{w}$ est le vecteur-image de z et que z est l'affixe du vecteur $\vec{w}$ et on note $\vec{w}(z)$.



Exercice de fixation

11 On considère le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Détermine les points images de chacun des nombres complexes suivants : $2 - 3i$; $-2i$; 4.
2. Détermine les affixes de chacun des points suivants : A(1 ; −4) ; B(−3 ; 2) ; C(0 ;−2) ; D(−5 ;0).
3. Détermine les vecteurs images de chacun des nombres complexes suivants : $2 - 3i$; $-2i$; 4.
4. Détermine les affixes des vecteurs suivants : $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Activité 11 Argument d'un nombre complexe

Le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

Dans chacun des cas suivants, construis le point-image M du nombre complexe z et détermine la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}\right)$: $1 + i$; $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Récapitulons

Le nombre complexe $z_A = 1 + i$ a pour point-image A(1 ;1) dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Le module du nombre complexe $z_A = 1 + i$ est $|z_A| = \sqrt{2} = OA$.

- La mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{u}; \vec{OA}}\right)$ est $\frac{\pi}{4}$.
- La mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{u}; \vec{OA}}\right)$ est appelée l'argument principal de z_A et est noté Arg(z_A).
- Toute mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{u}; \vec{OA}}\right)$ est un argument de z_A et est noté arg(z_A). Ainsi dans l'activité proposée, on a : Arg(z_A) = $\frac{\pi}{4}$ et Arg(z_B) = $-\frac{\pi}{3}$.

Exercice de fixation

12 On considère les points A, B, C D d'affixes respectives $2i$; -4 ; $2-2\sqrt{3}i$.
Détermine le module et l'argument de chacun de ces nombres.

Activité 12 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

On considère le nombre complexe z tel que $z = a + ib$ où a et b sont des nombres réels non tous nuls.

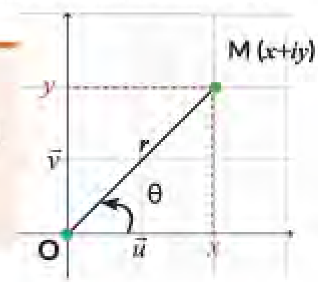
1. Calcule le module et un argument de z.
2. Écris le nombre complexe z en fonction de son module et de son argument.
3. Déduis que tout nombre complexe non nul est parfaitement déterminé par la donnée de son module et d'un quelconque de ses arguments.

Récapitulons

Soit z un nombre complexe non nul, r un réel strictement positif et θ un nombre réel.

$|z| = r$ et $Arg z = \theta \Leftrightarrow z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

Cette écriture de z est appelée la forme trigonométrique du nombre complexe z.



Exercice de fixation

13

1. a) Calcule le module et un argument de chacun des nombres complexe suivant : i ; $1 + i$; $\sqrt{3} + i$.
   b) Déduis–en la forme trigonométrique de chacun de ces nombres.
2. On considère le nombre complexe $z = 1 - i$.
   Pour chacune des affirmation, indique la lettre qui correspond à la bonne réponse
   a) Le module de z est égal à : i) 2 ; j) 0 ; k) $\sqrt{2}$.
   b) Un argument de z est : i) $\frac{\pi}{4}$; j) $-\frac{\pi}{4}$; k) $\frac{3\pi}{4}$.

Activité 13 Argument d'un produit et d'un quotient de nombres complexes

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et k un entier relatif. Justifie à l'aide de l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe les propriétés ci-dessous :

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$.
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$.
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$.
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi$.

Récapitulons

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et k un entier relatif. On a :

- arg (zz') = arg (z) + arg (z') + $2k\pi$.
- arg $(\frac{1}{z})$ = − arg (z) + $2k\pi$.
- arg $(\frac{z}{z'})$ = arg (z) − arg (z') + $2k\pi$.
- Pour $n \in$ Z, arg(z^n) = n arg(z) + $2k\pi$.

Exercice de fixation

14

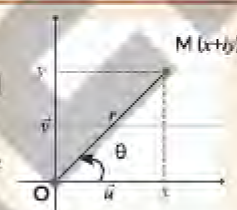
1. Détermine un argument de chacun des nombres complexes suivants : $\frac{1}{1+i}$; $\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}$.
2. $\frac{\pi}{8}$ est un argument de z. Détermine un argument de z^2 et z^{-3}.

Activité 14 Forme exponentielle d'un nombre complexe

On considère les nombres complexes suivants : $-3i$; $\sqrt{3}+i$ et -5.
1. Écris ces nombres complexes sous forme trigonométrique.
2. On pose : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Exprime chacun de ces nombres complexes en fonction de $e^{i\theta}$.

Récapitulons

Soit z un nombre complexe non nul, r et θ deux nombre réels tel que $r > 0$. $|z| = r$ et $\text{Arg}(z) = \theta \Leftrightarrow z = re^{i\theta}$ où $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
L'écriture de z sous la forme $z = re^{i\theta}$ est appelé e. la forme exponentielle du nombre complexe z.



Exercice de fixation

15

1. On considère le nombre complexe $z = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Réponds dans ton cahier par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) La forme exponentielle de $-z$ est $-4e^{i\frac{\pi}{3}}$;

b) La forme exponentielle de $\bar{z}$ est : $4e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2. On considère les nombres complexes $-7i$; $1-i$; $-4-4i$.

Écris chacun de ces nombres complexes sous forme exponentielle.

Activité 15 Formule de Moivre

Soit z le nombre complexe tel que : $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$.
Détermine le module et un argument du nombre complexe z.
Soit n un entier relatif quelconque. Détermine le module et un argument du nombre complexe z^n

Récapitulons

Pour tout nombre réel α et tout entier relatif n, $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$.
Si $z = re^{i\theta}$, alors $z^n = r^n e^{in\theta}$

Exercice de fixation

16 Détermine la forme algébrique du nombre complexe : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2022}$.

Activité 16 Formules d'Euler

Soit α un nombre réel. Exprime $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$ en fonction de sinα et de cosα.

Déduis-en que : $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$.

Récapitulons

Pour tout nombre réel α, $\cos\alpha = \dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ et $\sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$.

Exercice de fixation

17 Écris dans ton cahier le numéro de chacune des égalités ci-dessous, suivi de vrai si l'égalité est vraie ou faux si elle est fausse.

1. $2\cos 3x = e^{i3x} + e^{-3ix}$
2. $\sin 5x = \dfrac{e^{i5x}+e^{-i5x}}{2i}$
3. $2i\sin 2x = e^{i2x} - e^{-i2x}$
4. $2i\sin 2x = ei^{-2x} - e^{i2x}$
5. $2\cos 2x = e^{i2x} + e^{-i2x}$

Activité 17 Racine $n^{ième}$ d'un nombre complexe

A

1. Utilise la forme trigonométrique pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = 1 - i\sqrt{3}$.
2. Détermine les nombres complexes z tel que $z^3 = 1$.
3. On veut déterminer les nombres complexes z tel que $z^4 = 2\sqrt{2}(1+i)$.
   a) Calcule le module et un argument de $2\sqrt{2}(1+i)$.
   b) En posant $z = re^{i\theta}$ calcule z^4.
   c) Résous l'équation $z^4 = 2\sqrt{2}(1+i)$.

B

Soit z et Z deux nombres complexes donnés sous leurs formes exponentielles par : $z = re^{i\alpha}$ v et $Z = \rho e^{i\theta}$.

1. Exprime z^n sous la forme exponentielle.
2. Résous en procédant par identification l'équation : $z^n = Z$.
3. Déduis-en la forme des solutions ainsi que le nombre de solution de l'équation $z^n = Z$.
4. Soit les points M_k d'affixes respective z_k, solution de l'équation $z^n = Z$. Justifie que les points M_k appartiennent à un même cercle dont on précise le centre et le rayon.

Récapitulons

- n étant un entier naturel non nul, et Z un nombre complexe, on appelle racine $n^{ième}$ de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.
- $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ et $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$ sont les racines carrées du nombre complexe $1 - i\sqrt{3}$. On remarque que z_1 et z_2 sont opposés.
- Les racines cubiques de 1 (l'unité) sont : 1 ; $j = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
- On vérifie que $1 + j + j^2 = 0$.
- z_0, z_1, z_2 et z_3 sont appelées les racines 4ᵉ du nombre complexe $2\sqrt{2}(1+i)$.
- On admettra que tout nombre complexe non nul $\rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ admet n racines $n^{ième}$ de la forme $\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}\right)\right)$ avec $k \in \{0 ; 1 ; 2 ; ... ; n-1\}$.
- lorsque $n = 2$, les deux racines carrées sont opposées.
- lorsque $n \geq 3$, les racines $n^{ème}$ sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans un cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt[n]{\rho}$.

Exercice de fixation

18

a) Détermine les racines 5ème de $16\sqrt{2}(1-i)$.

b) Détermine les racines 3ème de $2i\sqrt{3}-2$.

Activité 18 Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des nombres complexes ($a \neq 0$).
On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$ et on désigne par δ et $-\delta$ les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de Δ.

1. Justifie que :
   - Si $\Delta = 0$, alors (E) a une solution double distinctes : $-\frac{b}{2a}$.
   - Si $\Delta \neq 0$, alors (E) a deux solutions distinctes : $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$.
2. Dégage une méthode de résolution d'une équation du second degré.

Récapitulons

Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré, $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des nombres complexes et a étant non nul,

- on calcule le discriminant Δ ;
- on détermine les racines carrées, δ et $-\delta$, de Δ ;
- on détermine les solutions : $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$.

Exercice de fixation

19 Résous dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

a) $(E_1) : z^2 - 2z + 2 = 0$; b) $(E_2) : z^2 - (3 + 5i)z - 4 + 7i = 0$.

Activité 19 Vecteur du plan

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J).
On donne les nombres complexes $1 + 2i$ et $2 - 3i$ de points images respectifs A et B.

1. a) Calcule $z_B - z_B$ et $|z_B - z_A|$.
   b) Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et déduis-en son affixe.
   c) Compare $z_B - z_A$ et $z_{\overrightarrow{AB}}$.
   d) Calcule AB et compare le résultat obtenu à $|z_B - z_A|$.
2. On considère les points A et B ci-dessus donnés. On sait qu'il existe un unique point M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Justifie que $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}}\right) = Arg(z_B - z_A) + 2k\pi$.
3. A, B, C et D étant quatre points distincts du plan, justifie que $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) = Arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Récapitulons

A et B sont deux points distincts du plan complexe et z_A et z_B leurs affixes respectives.
On a $z_{AB} = z_B - z_A$.

- $AB = |z_B - z_A|$;
- $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}}\right) = Arg(z_B - z_A) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
- $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) = Arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Exercice de fixation

20 On donne les points A, B et C d'affixes respectives $2 - i$, $1 + i$ et $1 + 2\sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$.
a) Calcule AB, AC et BC.
b) Détermine $Arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right)$.
c) Déduis-en la nature du triangle ABC.

Activité 20 Caractérisation d'une droite, d'une demi-droite et d'un cercle

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soir A et B deux points distincts du plan d'affixes respectifs z_A et z_B. M est un point d'affixe z_M distinct de A, de B, et r un nombre réel strictement positif.
Justifie que :

1. M appartient à la droite (AB) $\Leftrightarrow Arg\left(\dfrac{z_M - z_A}{z_B - z_A}\right) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. M appartient à la demi-droite [AB) $\Leftrightarrow Arg\left(\dfrac{z_M - z_A}{z_B - z_A}\right) = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. M appartient au cercle de centre A et de rayon $r \Leftrightarrow |z_M - z_A| = r$ $(r \in \mathbb{R}^{*+})$.
4. M appartient à la médiatrice du segment [AB] $\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B|$.

Récapitulons

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soir A et B deux points distincts du plan d'affixes respectifs z_A et z_B. M est un point d'affixe z_M distinct de A et B, et r un nombre réel strictement positif.

1. M appartient à la droite (AB) $\Leftrightarrow Arg\left(\dfrac{z_M - z_A}{z_B - z_A}\right) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. M appartient à la demi-droite [AB) $\Leftrightarrow Arg\left(\dfrac{z_M - z_A}{z_B - z_A}\right) = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. M appartient au cercle de centre A et de rayon $r \Leftrightarrow |z_M - z_A| = r$ $(r \in \mathbb{R}^{*+})$.
4. M appartient à la médiatrice du segment [AB] $\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B|$.

Exercice de fixation

21 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On considère les points A, B et C d'affixes respectifs $z_A = -3 + 2i$; $z_A = 3 + i$ et $z_C = -9 + 3i$.

En utilisant la caractérisation complexe d'une droite, d'une demi-droite ou d'un cercle, écris dans ton cahier le numéro de chacune des affirmations suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. Les points A, B et C ne sont pas alignés ;
2. Les points A, B et C sont alignés ;
3. C appartient à la demi-droite [BA) ;
4. C n'appartient pas à la demi-droite [BA) ;
5. B appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{10}$.

22 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et K d'affixes respectifs $2 + i$, $-1 + 2i$ et $-4 + 3i$.

1. Justifie que le point K appartient à la droite (AB).
2. Détermine l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie : $|z| = 3$.
3. Détermine l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

   a) $|z - 2 - i| = 2$.

   b) $|z + 1 - 2i| = |2 + i - z|$.

I. ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES – FORME ALGÉBRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1. Propriété et définition

Il existe un nombre noté i, tel que : $i^2 = -1$.

On appelle nombre complexe tout nombre de la forme $a + ib$, tel que a et b sont des nombres réels.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ sont définies une addition et une multiplication ayant respectivement les mêmes règles de calcul que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

Remarques

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Exemple

$2 + 3i$: $5i$; $-\sqrt{2}\, i$; 7 sont des nombres complexes.

2. Forme algébrique d'un nombre complexe

Forme algébrique d'un nombre complexe

Propriété et définition

a et b sont deux nombres réels.

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + bi$ ($a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$).

- a est appelé la partie réelle de z et est notée $Re(z)$.
- b est appelé la partie imaginaire de z et est notée $Im(z)$.

On appelle forme algébrique du nombre complexe z l'écriture de z sous la forme $a + ib$.

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0$, on dit que z est un nombre réel.
- l'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 0$, On dit que z est un imaginaire pur.

Remarque

Zéro est le seul nombre complexe qui est à la fois un nombre réel et un imaginaire pur.

Exemple

$Z = 7 + 9i$.

7 est la partie réelle du nombre complexe Z et 9 la partie imaginaire de ce nombre complexe.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 2 ; 3 ; 4

Égalité de deux nombres complexes

Propriété

a, b, a' et b' sont quatre nombres réels.

$z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

$z = z' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.

$z = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.

Exemple

Soit x un nombre réel et soit le nombre complexe $-x + (1 - x)i$.

Déterminons x pour que : $-x + (1 - x)i = 2 + 3i$.

$$-x + (1 - x)i = 2 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 2 \\ 1 - x = 3 \end{cases}.$$

On trouve dans les deux cas $x = -2$.

Effectivement pour $x = -2$, on a bien $-x + (1 - x)i = 2 + 3i$.

Pour s'entraîner : Exercice 6

3. Calcul dans $\mathbb{C}$

Opposé d'un nombre complexe

Propriété et définition

a et b sont deux nombres réels et $z = a + ib$, un nombre complexe. Il existe un et un seul nombre complexe z', tel que : $z + z' = 0$. z' est appelé opposé de z et est noté $-z$. On a : $-z = -a - ib$.

Exemple

L'opposé du nombre complexe $-9 + 3i$ est le nombre complexe $9 - 3i$.

Pour s'entraîner : Exercice 7

Somme de deux nombres complexes

Propriété

a, b, a' et b' sont quatre nombres réels. $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + (b + b')i$.

Exemple

Soit $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$. Calculons et écrivons sous la forme algébrique :
$z + z'$ et $z - z'$.
$z + z' = 2 + 3i + i - 5 = -3 + 4i$.
$z - z' = 2 + 3i - (i - 5) = 2 + 3i - i + 5 = 7 + 2i$.

Pour s'entraîner : Exercice 8

Produit de deux nombres complexes

Propriété

a, b, a' et b' sont quatre nombres réels. $(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$.

Remarque

Ne pas retenir par cœur la formule donnée dans la propriété.

Exemple

Soit $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$. Calculons et écrivons sous la forme algébrique :
$2z - 3z'$; zz' et z^2.

- $2z - 3z' = 2(2 + 3i) - 3(i - 5)$
  $= 4 + 6i - 3i + 15$
  $= 19 + 3i$.
- $zz' = (2 + 3i)(i - 5) = 2i - 10 + 3i^2 - 15i$
  $= 2i - 10 - 3 - 15i$
  $= -13 - 13i$.
- $z^2 = (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 3i + (3i)^2$
  $= 4 + 12i + 9i^2$
  $= 4 + 12i - 9$
  $= -5 + 12i$.

Pour s'entraîner : Exercice 9

Inverse d'un nombre complexe

Propriété

a et b sont deux nombres réels, tels que $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$.

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}.$$

Exemple

Calculons $(3 + 2i)(3 - 2i)$, puis déduisons la forme algébrique de $\frac{1}{3+2i}$.

$(3 + 2i)(3 - 2i) = (3)^2 - (2i)^2 = 9 - (-4) = 9 + 4 = 13$

$$\frac{1}{3+2i} = \frac{(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i.$$

Pour s'entraîner : Exercice 10

Puissance d'un nombre complexe

Définition

Soit z un nombre complexe et n un nombre entier naturel non nul. On a :

- $z^{n+1} = z^n \times z$; • si z est non nul, $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$.

Remarque

Pour tout nombre complexe non nul z, on pose ; $z^0 = 1$.

Exemple

Calculons :

- i^{2020} ;
- $(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)^6$.

➲ $i^{2020} = i^{4\times505} = (i^2)^{2\times505} = (-1)^{2\times505} = 1$

➲ $$(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)^6 = (\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)^{2\times3}$$
$$= (\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$$
$$= (-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$
$$= \frac{-1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i+\frac{\sqrt{3}}{4}i-\frac{3}{4}$$

Donc : $(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)^6 = -1$

Pour s'entraîner : Exercices 11 ; 12

Propriété

Soit n, un entier naturel.

- $i^{4n} = 1$; • $i^{4n+1} = i$; • $i^{4n+2} = -1$; • $i^{4n+3} = -i$

Exemple

Calculons : i^{1000} ; i^{2021} ; i^{2023} et i^{2028}.

$i^{1000} = i^{4\times250} = 1$; $i^{2021} = i^{4\times505+1} = i$;

$i^{2023} = i^{4\times505+3} = -i$; $i^{2028} = i^{4\times507} = 1$.

Produit nul

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes.

$z \times z' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$.

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{C}$, $(2z - 3i)(z - 6 + i) = 0$.

- $(2z - 3i)(z - 6 + i) = 0 \Leftrightarrow 2z - 3i = 0$ ou $z - 6 + i = 0$.

Soit : $z = \frac{3}{2}i$ ou $z = 6 - i$.

L'ensemble des solutions est $\{\frac{3}{2}i \,;\, 6 - i\}$.

Pour s'entraîner : Exercice 13 ; 14

4. Conjugué d'un nombre complexe

Définition

On appelle conjugué d'un nombre complexe z, le nombre complexe noté $\overline{z}$, tel que :

$\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.

Conséquence

- a et b étant deux nombres réels, le conjugué de $a + ib$ est le nombre complexe $a - ib$.
- Pour tout nombre complexe z, $\overline{\overline{z}} = z$.
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$

Exemple

Déterminons le nombre complexe conjugué de chacun des nombres complexes suivants ; $2-i$; $1+2i$; 5 ; -3.

Le conjugué de $2-i$ est $2+i$.
Le conjugué de $1+2i$ est $1-2i$.
Le conjugué de 5 est 5.
Le conjugué de -3 est -3.

Propriété 1

Soit z un nombre complexe.

- $z+\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$.
- $z-\overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.
- $z\overline{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$.
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$.
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

Exemple

On donne le nombre complexe z, tel que : $z = 4+3i$.

Calculons $z+\overline{z}$; $z-\overline{z}$ et $z\overline{z}$.
$z+\overline{z} = 2\times 4 = 8$.
$z-\overline{z} = 2i\times 3 = 6i$.
$z\overline{z} = 4^2+3^2 = 25$.

Propriété 2

Soit z et z' deux nombres complexes.

- $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$; • $\overline{zz'} = \overline{z}\times\overline{z'}$; • Lorsque $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$; • Lorsque $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Exemple

Déterminons les conjugués de :
$(2+5i)+(1-3i)$;
$(2+5i)(1-3i)$ et $\dfrac{2+5i}{1-3i}$.

- $$\begin{aligned}\overline{(2+5i)+(1-3i)} &= \overline{(2+5i)}+\overline{(1-3i)}\\ &= 2-5i+1+3i\\ &= 3-2i\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\overline{(2+5i)(1-3i)} &= \overline{(2+5i)}\ \overline{(1-3i)}\\ &= (2-5i)(1+3i)\\ &= 2+6i-5i+15\\ &= 17+i\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{2+5i}{1-3i}\right)} = \frac{\overline{2+5i}}{\overline{1-3i}} = \frac{2-5i}{1+3i} &= \frac{(2-5i)(1-3i)}{10}\\ &= -\frac{13}{10}-\frac{11}{10}i.\end{aligned}$$

Pour s'entraîner : Exercices 15 ; 16 ; 17

5. Module d'un nombre complexe

Définition

On appelle module du nombre complexe z, noté $|z|$, le nombre réel positif $\sqrt{z\overline{z}}$.

› Remarque

soit $z = a + ib$, on a : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemple

Déterminons le module de chacun des nombres complexes suivants :

$1+i$; $1-\sqrt{3}i$; $\sqrt{5}+3i$; $2i$.

- $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.
- $|1-\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$.
- $|\sqrt{5}+3i| = \sqrt{(\sqrt{5})^2+3^2} = \sqrt{5+9} = \sqrt{14}$.
- $|2i| = \sqrt{0^2+2^2} = 2$.

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes.

- $|\bar{z}| = |z|$;
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
- $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$;
- $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$;
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$;
- $|zz'| = |z| \times |z'|$;
- Lorsque $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$;
- Lorsque $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

› Remarque

Pour tout nombre complexe z non nul, on a : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$,

Exemple

Calculons le module de chacun des nombres complexes suivants :

1) $(7+35i)(3+2i)$; 2) $\frac{7-35i}{3-2i}$; 3) $\frac{(5+3i)(1+i)}{4+i}$.

- $$\begin{aligned}|(7+35i)(3+2i)| &= |7+35i|\ |3+2i| \\ &= 7|1+5i|\ |3+2i| \\ &= 7\sqrt{1^2+5^2}\times\sqrt{13} \\ &= 7\sqrt{26\times 13} \\ &= 7\sqrt{2\times 13^2} \\ &= 91\sqrt{2}.\end{aligned}$$
- $\left|\frac{7-35i}{3-2i}\right| = \frac{|7-35i|}{|3-2i|} = \frac{7|1-5i|}{|3-2i|} = \frac{7\sqrt{1^2+5^2}}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{7\sqrt{26}}{\sqrt{13}} = 7\sqrt{2}$.
- $$\begin{aligned}\left|\frac{(5+3i)(1+i)}{4+i}\right| &= \frac{|(5+3i)(1+i)|}{|4+i|} \\ &= \frac{\sqrt{5^2+3^2}\times\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{4^2+1^2}} \\ &= \frac{\sqrt{34}\times\sqrt{2}}{\sqrt{17}} \\ &= 2.\end{aligned}$$

Pour s'entraîner : Exercices 19 ; 20 ; 21 ; 22 ; 23

6. Affixe, point-image et vecteur image

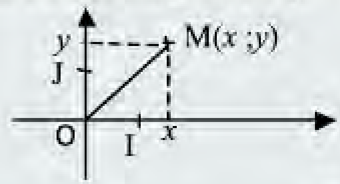
Propriété et définition

On appelle plan complexe, le plan orienté par la donnée d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- À tout point M de coordonnées $(x ; y)$ du plan complexe, on associe le nombre complexe unique, noté z, qui s'écrit $z = x + iy$.

- Réciproquement, à tout nombre complexe $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels, on associe dans le plan complexe le point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$.
- z est appelé affixe de M.
- M est appelé le point image de z.
- Au vecteur $\vec{w}$ de composantes $(x\ ;\ y)$, on associe le nombre complexe $x + iy$.

On dit que $x + iy$ est l'affixe de $\vec{w}$ et que $\vec{w}$ est le vecteur image de $x + iy$.



Exemple

- Soit A le point-image du nombre complexe $3i$. Déterminons les coordonnées de A.
- Déterminons l'affixe du vecteur $\vec{u}(-3\ ;\ 8)$.

- Le point A a pour coordonnées $(0\ ;\ 3)$.
- L'affixe du vecteur $\vec{u}(-3\ ;\ 8)$ est le nombre complexe $-3 + 8i$.

Définition

Soit z et z' les affixes respectives des points M et M' dans le plan complexe.

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est $z' - z$.
- Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est le vecteur image de $z' - z$.

Exemple

Soient 5i et $2 - 3i$ les affixes respectives des points A et B dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminons l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

L'affixe du vecteur, $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $(2 - 3i) - (5i)$, soit $2 - 8i$.

Propriété

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O\ ; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'. Le point I est le milieu de [MM'].
On a :

- $MM' = |z' - z|$; • l'affixe de I est $\dfrac{z + z'}{2}$; • l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ est $z + z'$.

Exemple

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O\ ; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives $2 + 5i$ et $-4 + 3i$.

- Calculons AB
- Déterminons l'affixe du milieu K du segment [AB].

- $AB = |(-4 + 3i) - (2 + 5i)|$
 $= |-6 - 2i|$
 $= \sqrt{6^2 + 2^2}$
 $= 2\sqrt{10}$
- L'affixe du point K est le nombre complexe $\dfrac{(2+5i)+(-4+3i)}{2}$, soit : $-1 + 4i$.

Pour s'entraîner : Exercice 24 ; 25 ; 26 ; 27 ; 28

II. FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1. Argument d'un nombre complexe

Définition

Soit z un nombre complexe non nul, M le point-image de z dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

- On appelle argument principal du nombre complexe z, noté ARG(z), la mesure principale de l'angle $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}})$.
- Toute autre mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}})$ est appelé un argument de z et noté : arg (z).

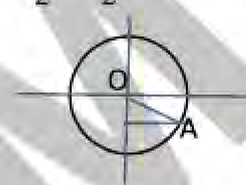
Exemple

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

Déterminons l'argument principal du nombre complexe $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

La méthode à utiliser ici est le cercle trigonométrique.

Soit A le point image du nombre complexe $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.



Ici, la mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OA}})$ est : $-\frac{\pi}{6}$.

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ et ARG(z') = ARG(z).
- $z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ et arg(z') = arg(z) + $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple

z est le nombre complexe de module 2 et d'argument $-\frac{\pi}{3}$.

z' est le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{5\pi}{3}$.

Justifions que : $z = z'$.

On a : $|z| = |z'|$ et $\frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi$,

soit arg(z') = arg(z) + 2π, donc $z = z'$.

Pour s'entraîner : Exercices 33 ; 34 ; 35

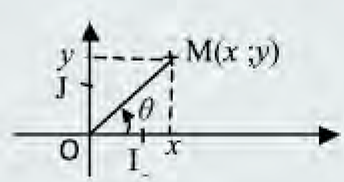
2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Propriété et définition

Propriété

Soit z un nombre complexe non nul, M son point image et θ un argument de z. On a :

- $|z| = OM$.
- $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{y}{|z|}$.



Exemple

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
Déterminons l'argument principal du nombre complexe $\sqrt{3}+i$.

$\left|\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = 2$.

Soit θ l'argument principal du nombre complexe $\sqrt{3}+i$.

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$, donc : $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Définition

Soit z un nombre complexe non nul et θ un argument de z.
On appelle forme trigonométrique de z, l'écriture de z sous la forme $|z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Exemple

Écrivons le nombre complexe $1 + i$ sous forme trigonométrique.
$\left|1+i\right| = \sqrt{2}$; soit θ l'argument principal de $1 + i$.

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc : $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Donc : $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Propriété

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls, pour tout nombre entier relatif n,

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.
- $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Exemple

Soit z et z' deux nombres complexes, tels que :
$\mathrm{ARG}(z) = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\mathrm{ARG}(z') = \dfrac{\pi}{3}$.
Déterminons un argument de chacun des nombres complexes suivants : zz' ; $\dfrac{1}{z}$; $\dfrac{z'}{z}$.

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$= \frac{-3\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} + 2k\pi$$
$$= -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$$
$$= \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

- $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$= \frac{-3\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} + 2k\pi$$
$$= \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi$$

Un argument de zz' est $-\dfrac{\pi}{6}$; un argument de $\dfrac{1}{z}$ est $\dfrac{\pi}{2}$ et un argument de $\dfrac{z'}{z}$ est $\dfrac{-5\pi}{6}$.

Forme algébrique-forme trigonométrique

Pour s'entraîner : Exercices 33 ; 34 ; 35

(Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique.)

Point méthode 1

Soit z un nombre complexe non nul donné sous forme algébrique $a + ib$ où a et b sont des nombres réels.
Pour déterminer la forme trigonométrique de z, on peut :

- calculer le module de z ; $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$;
- calculer cos θ et sin θ ; $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
- déterminer θ (il faut pour cela connaître les angles remarquables et le cercle trigonométrique) ;
- écrire z sous forme trigonométrique : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Exemple

Déterminons la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

a) $\sqrt{3}+i$; b) $1+i$; c) $(\sqrt{3}+i)(1+i)$; d) $\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}$.

a) $|\sqrt{3}+i| = 2$ et $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$.

$\sqrt{3}+i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

b) $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

c) $|(\sqrt{3}+i)(1+i)| = 2\sqrt{2}$ et

$\arg(\sqrt{3}+i)(1+i) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$.

$(\sqrt{3}+i)(1+i) = 2\sqrt{2}\ (\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$.

d) $|\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}| = \sqrt{2}$;

$\arg(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$.

$\frac{\sqrt{3}+i}{1+i} = \sqrt{2}\,(\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12}))$.

(Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique)

Point méthode 2

Soit z un nombre complexe donné sous forme trigonométrique $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où θ est un argument de z et r le module de z.

Pour déterminer la forme algébrique de z. On peut :

- Déterminer $\cos\theta$ et $\sin\theta$;
- Déterminer la partie réelle $\text{Re}(z)$ et la partie imaginaire $\text{Im}(z)$ de z, $\text{Re}(z) = r\cos\theta$ et $\text{Im}(z) = r\sin\theta$;
- Écrire la forme algébrique de z ; $z = \text{Re}(z) + i\,\text{Im}(z)$.

Exemple

Écrivons chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique :

a) $\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$; b) $4\,(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$;

c) $\sqrt{2}\,(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4}))$.

a) $\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}\,(0+i) = i\sqrt{2}$.

b) $4(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})) = 4(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 2 - 2\sqrt{3}\,i$.

c) $\sqrt{2}\,(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4})) = \sqrt{2}\,(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})$

$= -1 - i$.

3. Forme exponentielle

Propriété et définition

Pour tout nombre réel θ, on pose : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ, s'écrit de façon unique sous la forme $re^{i\theta}$, appelée forme exponentielle de z.

Exemple

Écrivons les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

a) $\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$; b) $1 - \sqrt{3}\,i$.

a) $\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$.

b) $|1-\sqrt{3}\,i| = 2$ et $\text{Arg}(1-\sqrt{3}\,i) = -\frac{\pi}{3}$,

donc : $1 - \sqrt{3}\,i = 2e^{\frac{-\pi}{3}i}$.

Propriété

Soit θ et θ' deux nombres réels. On a :

- $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$; • $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$; • $|e^{-i\theta}| = |e^{i\theta}| = 1$; • $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; • $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

Exemple

Écrivons les nombres complexes ci-dessous sous la forme $e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel.

a) $e^{-\frac{\pi}{3}i} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$; b) $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{5}}}$; c) $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{5}}}{e^{i\frac{2\pi}{5}} \times e^{-i\frac{4\pi}{5}}}$.

a) $e^{\frac{-\pi}{3}i} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{-\frac{\pi}{3}i + i\frac{\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{12}}$;

b) $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{5}}} = e^{i\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{5}} = e^{i\frac{3\pi}{10}}$;

c) $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{5}}}{e^{i\frac{2\pi}{5}} \times e^{-i\frac{4\pi}{5}}} = e^{i\frac{\pi}{5} - (i\frac{2\pi}{5} - i\frac{4\pi}{5})} = e^{i\frac{3\pi}{5}}$.

Pour s'entraîner : Exercices 38 ; 39 ; 40

4. Formule de Moivre

Propriété

θ est un nombre réel et n un nombre entier relatif. $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Exemple

On donne :

$1 + i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

Écrivons sous forme exponentielle $(1 + i)^3$.

$(1 + i)^3 = (\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}))^3$

$= (\sqrt{2})^3\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

$= 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Pour s'entraîner : Exercices 41 ; 42

5. Formules d'Euler

Propriété

θ est un nombre réel et n un nombre entier relatif.

- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$; • $\cos n\theta = \dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$; $\sin n\theta = \dfrac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$.

Exemple

Écrivons sous forme algébrique : $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}$.

$\dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour s'entraîner : Exercices 43 ; 44

Remarque

- On utilise la même méthode pour $\sin^n x$ avec $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.
- Linéariser une puissance de sinus, de cosinus ou de tangente, c'est l'écrie sous la forme d'une somme de sinus ou de cosinus.
- Pour linéariser $\cos^2 x \sin^3 x$, il suffit de développer $\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$ et utiliser la même méthode.

Exemple

On se propose de linéariser $\sin^3 x$.

- $\sin^3 x = \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$

$$= \frac{e^{3ix} - 3e^{2ix}\times e^{-ix} + 3e^{ix}\times e^{-2ix} - e^{-3ix}}{-8i}$$

$$= \frac{e^{3ix} - e^{-3ix} - 3(e^{ix} - e^{-ix})}{-8i}$$

$$= \frac{-2\sin(3x) + 6\sin x}{8};$$

par suite : $\sin^3 x = \dfrac{-\sin(3x) + 3\sin x}{4}$.

Pour s'entraîner : Exercice 45

III. RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

1. Racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

Définition

Soit n un nombre entier naturel non nul et Z un nombre complexe.

- On appelle racine carrée du nombre complexe Z, tout nombre complexe z, tel que $z^2 = Z$.
- On appelle racine $n^{\text{ième}}$ du nombre complexe Z, tout nombre complexe z, tel que : $z^n = Z$.

Point méthode

Pour déterminer une racine carrée d'un nombre complexe Z, on peut :

- poser $\delta^2 = Z$ avec $\delta = x + yi$, $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$;
- calculer $|Z| = |\delta^2|$ soit $|Z| = x^2 + y^2$;
- calculer $\delta^2 = Z$, soit $x^2 - y^2 + 2xyi = Z$;
- résoudre le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = |Z| \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(Z) \\ 2xy = \mathrm{Im}(Z) \end{cases}$

Exemple

Déterminons les racines carrées de $-3 + 4i$.

Posons $\delta^2 = \Delta$ avec $\delta = x + yi$, $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$.

On a : $x^2 - y^2 + 2xyi = -3 + 4i$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

On trouve : $x^2 = 1$ soit $x = 1$ ou $x = -1$.

Si $x = 1$, $y = 2$ et si $x = -1$; $y = -2$.

On en déduis que $\delta = 1 + 2i$ ou $\delta = -1 - 2i$.

Les racines carrées de $-3 + 4i$ sont : $1 + 2i$ et $-1 - 2i$.

Propriété 1

Soit n un nombre entier naturel non nul, $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ la forme trigonométrique d'un nombre complexe z non nul.

- 0 est la seul racine $n^{ième}$ de 0.
- z admet n racines $n^{ième}$ qui sont de la forme :

$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right],$$

$[k \in \{0 ; 1,2,\ldots, (n-1)]$.

- Dans le plan complexe, les points-images des n racines $n^{ième}$ sont sur le cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.
  - ✓ Lorsque $n = 2$, les points-images des deux racines carrées sont diamétralement opposés sur (C).
  - ✓ Lorsque n > 2, les points-images des n racines $n^{ième}$ sont les sommets d'un polygone régulier de n côté inscrit dans le cercle (C).

Exemple

1. a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^5 = 1$.
   b) Démontrons que la somme des racines cinquième de l'unité est égale à zéro.
2. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^5 = -i$.
3. Calculons la somme des racines et interprétons géométriquement ce résultat en introduisant l'isobarycentre de leurs images.
4. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 = 0$.

1. a) Les racines cinquième de l'unité sont 1 ; $e^{i\frac{2\pi}{5}} ; e^{i\frac{4\pi}{5}} ; e^{i\frac{-4\pi}{5}} ; e^{i\frac{-2\pi}{5}}$.

b) $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \dfrac{z^5-1}{z-1}$ avec $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et donc $z \neq 1$ et $z^5 = 1$.

donc : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

2. $z^5 = -i$. Les solutions sont :

$e^{-\frac{\pi}{10}i}$; $e^{\frac{3\pi}{10}i}$; $e^{\frac{i7\pi}{10}}$; $e^{-\frac{i9\pi}{10}}$; $e^{-\frac{i5\pi}{10}}$.

3. $e^{-\frac{\pi}{10}i}(1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{-4\pi}{5}}+e^{i\frac{-2\pi}{5}})=0$.

C'est que l'isobarycentre des points images des solutions est le point O(0 ;0) origine du repère orthonormé orienté.

4. $1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 = 1 + (iz) + (iz)^2 + (iz)^3 + (iz)^4 = \dfrac{(iz)^5-1}{iz-1} = 0 \Leftrightarrow (iz)^5 - 1 = 0$ et $z \neq i$.

C'est-à-dire $z^5 = -i$.

Les solutions sont donc :

$e^{-\frac{\pi}{10}i}$; $e^{\frac{3\pi}{10}i}$; $e^{\frac{i7\pi}{10}}$; $e^{-\frac{i9\pi}{10}}$ et $e^{-\frac{i5\pi}{10}}$.

Propriété 2

On pose : $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

- Les trois racines cubiques de l'unité sont 1, j et $\overline{j}$.
- $1 + j + \overline{j} = 0$ et $j^2 = \overline{j}$.

Exemple

Vérifions que $1 + j + \overline{j} = 0$.

$$1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0, \text{ car } j^3 = 1.$$

Pour s'entraîner : Exercices 46 ; 47 , 48 ; 48 ; 49

IV. NOMBRE COMPLEXE ET CONFIGURATION DU PLAN

Propriété

A, B, C et D sont quatre points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.

- Pour A ≠ B et C ≠ D

$$mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \arg\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} + 2k\pi \; [k \in \mathbb{Z}].$$

- AB = CD $\Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_D - z_C|$.
- A, B, et C sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$.
- (AB)$\perp$(CD) $\Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.
- M appartient à la médiatrice du segment [AB] $\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B|$.
- M appartient au cercle de centre A et de rayon r ($r > 0$) $\Leftrightarrow |z_M - z_A| = r$.

Pour s'entraîner : Exercices 53 ; 54

QUESTION 1

Comment résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$?

Méthode

Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des nombres complexes et a est différent de zéro, on peut :

- calculer le discriminant Δ ;
- déterminer les racines carrées δ et $-\delta$ de Δ ;
- déterminer les solutions $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$.

Exercice

Résolvons dans $\mathbb{C}$: $z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$. $\Delta = 3 + 4i$.

Solution commentée

En utilisant la méthode permettant de déterminer la racine carré d'un nombre complexe, on trouve :

$\delta = 2 + i$

$z_1 = \dfrac{-(3i-4)-(2+i)}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-(3i-4)+(2+i)}{2}$

$z_1 = -2i + 1$ et $z_2 = 3 - i$. $S = \{1 - 2i \,;\, 3 - i\}$.

Exercice non corrigé

On cherche à résoudre l'équation (E) : $z^4 + z^3 + 5z^2 + 2z + 6 = 0$

a) Justifie que $i\sqrt{2}$ est solution de (E).

b) Détermine les nombres complexes a, b et c tels que : $z^4 + z^3 + 5z^2 + 2z + 6 = (z^2 + 2)(az^2 + bz + c)$

c) Résous l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

QUESTION 2

Comment linéariser une expression trigonométrique ?

Méthode

Pour linéariser $\cos^n x$, on peut procéder comme suit :

- utiliser la formule d'Euler : $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$;
- élever à la puissance n chaque membre,
- $\cos^n x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$;
- développer $\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$ (on peut utiliser le triangle de Pascal);
- regrouper les termes pour retrouver la formule d'Euler $e^{inx} + e^{-inx} = 2\cos(nx)$
- achever le calcul.

Remarque

- On utilise la même méthode pour $\sin^n x$ avec $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
- Pour linéariser $\cos^2 x \sin^3 x$, il suffit de développer $\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$ et utiliser la même méthode.

Exercice

Linéarise $\cos^3 x \sin^2 x$

Solution commentée

On se propose de linéariser $\cos^3 x \sin^2 x$.

$$\cos^3 x \sin^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2$$

$$= -\frac{(e^{2ix}-e^{-2ix})^2(e^{ix}+e^{-ix})}{32}$$

$$= -\frac{(e^{4ix}-2+e^{-4ix})(e^{ix}+e^{-ix})}{32}$$

$$= -\frac{e^{5ix}+e^{3ix}-2(e^{ix}+e^{-ix})+e^{-3ix}+e^{-5ix}}{32}$$

$$= -\frac{e^{5ix}+e^{-5ix}+e^{3ix}+e^{-3ix}-2(e^{ix}+e^{-ix})}{32}$$

$$= -\frac{2\cos(5x)+2\cos(3x)-4\cos x}{32},$$

donc : $\cos^3 x \sin^2 x = -\dfrac{\cos(5x)+\cos(3x)-2\cos x}{16}$.

Exercice non corrigé

Soit x un nombre réel.

Linéarise les expressions suivantes :

1) $\cos^3 x$; 2) $\sin^2 x \cos^2 x$; 3) $\cos^4 x$; 4) $\sin^5 x$.

QUESTION 3

Comment étudier une configuration géométrique avec des nombres complexes ?

Méthode

On se ramène aux propriétés des nombres complexes relatives :
à l'alignement, à l'orthogonalité, aux mesures d'angles, au cercle, à la médiatrice d'un segment etc.

Exercice

Dans le plan complexe, on donne les points A(2), B(5) C(5 + 3i), D(2 + 3 i), $E\left(\frac{7}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)$ et $\left(\frac{10+3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)$.

1. Justifie que le quadrilatère ABCD est un carré.
2. Détermine la nature du triangle AEB. Justifie ta réponse.
3. Justifie que les points D, E et F sont alignés.

Solution commentée

1. Justifions que ABCD est un carré.

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 5-2 = 3$;

$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 5+3i-2-3i = 3$ donc $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$

d'où ABCD est un parallélogramme.

$z_{\overrightarrow{AD}} = z_D - z_A = 2+3i-2 = 3i$; $\dfrac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AD}}} = \dfrac{3}{3i} = -i$

donc $Arg\dfrac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AD}}} = -\dfrac{\pi}{2}$ et AB = AD

Ainsi on a :

- ABCD est un parallélogramme.
- $Arg\dfrac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AD}}} = -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
- AB = AD

Il ressort de ces trois points que ABCD est un carré.

2. Déterminons la nature du triangle AEB.

$z_{\overrightarrow{AE}} = z_E - z_A = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $z_{\overrightarrow{AB}} = 3$ donc

$\frac{z_{\overrightarrow{AE}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ainsi on a : AB = AE et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}}\right) = \frac{\pi}{3}$

donc le triangle AEB est équilatéral.

3. Justifions que les points D, E et F sont alignés.

$z_{\overrightarrow{ED}} = z_D - z_E = -\frac{3}{2} + 3i\left(1 - \frac{3}{2}\right)$ et

$z_{\overrightarrow{EF}} = z_F - z_E = \frac{3+3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3-3\sqrt{3}}{2}$

$\frac{z_{\overrightarrow{EF}}}{z_{\overrightarrow{ED}}} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, donc les points E, F, et D sont alignés.

Exercice non corrigé

Soit A, B et C trois points d'affixe $z_A = 3 + 6i$, $z_B = -1 - 2i$ et $z_C = -3 + 4i$

1. Justifie que O, A et B sont alignés.
2. Démontre que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre E(1 ;2) dont on déterminera le rayon.
3. Détermine l'affixe du point D tel que B soit le symétrique de D par rapport à A.
4. Détermine l'ensemble des points M tels que : $Arg\left(\frac{z-1+2i}{z-2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Exercices de fixation

Ensemble des nombres complexes-Forme algébrique d'un nombre complexe

1 Pour chaque affirmation, trois réponses sont proposées. Écris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la réponse correcte.

1- La forme algébrique de $\frac{5-2i}{4+3i}$ est

a) $\frac{15}{25}+\frac{3i}{25}$; b) $\frac{26}{25}+\frac{7}{25}i$; c) $\frac{26}{25}-\frac{23}{25}i$.

2- Le conjugué de $\frac{1-z}{1-i}$ est :

a) $\frac{1+z}{1-i}$; b) $\frac{1+\bar{z}}{1+i}$; c) $\frac{1-\bar{z}}{1+i}$.

2 Dans chacune des questions ci-dessous, entoure la bonne réponse.

Le nombre complexe $\sqrt{2}-4i$ a pour partie imaginaire :

a) $-4i$ b) $\sqrt{2}-4$ c) -4

3 On donne trois nombres complexes z_1 ; z_2 et z_3, tels que $z_1 = i$; $z_2 = 7-9i$ et $z_3 = \frac{2i-5}{3}$

Détermine la partie réelle et la partie imaginaire de chacun d'eux.

4 Détermine le nombre réel x pour que :

1. $2+(3-x)i$ soit un nombre réel.
2. $(2x-1)+4i$ soit un imaginaire pur.

5 Pour chacune des propositions ci-dessous, trois réponses sont données, choisis la bonne réponse.

N°	Énoncés	Réponses a	b	c
1	$z=5-i\sqrt{2}$ a pour module	27	$\sqrt{27}$	$\sqrt{29}$
2	$z=-\sqrt{3}+i\sqrt{3}$ a pour argument	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$
3	$z=-2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ a pour argument	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
4	La forme exponentielle de $\frac{5\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$ est	$\frac{15}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$	$\frac{5\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$	$\frac{5\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$
5	$(1+i)^{72}$ est égal à :	2^{72}	2^{36}	0
6	On considère les points A(2+i) et B(2− 4i). le triangle OAB est :	Rectangle	Équilatéral	Isocèle
7	L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie : $\lvert z-1+i\rvert=\lvert z+2i\rvert$ est :	Un cercle	La médiatrice de [AB] avec A(−1+i) et B(2i)	La médiatrice de [AB] avec A(1−i) et B(−2i)

Egalité de deux nombres complexes

6 Soit x un nombre réel et z un nombre complexe, tel que : $z = 2+(x-1)i$.

Détermine x pour que z soit égal au nombre complexe $2+i$.

Opposé d'un nombre complexe

7 Détermine l'opposé de chacun des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 tels que :

$z_1 = 17-9i$, $z_2 = -\sqrt{2}\,i$ et $z_3 = -5-6i$.

Somme de deux nombres complexes

8 Dans chacun des cas suivants, calcule la somme des nombres complexes z_1 et z_2.

1. $z_1 = 2+i$, $z_2 = 3+2i$
2. $z_1 = -4+3i$, $z_2 = 5-8i$
3. $z_1 = -1-i$, $z_2 = -7-17i$

On mettra chaque résultat obtenu sous forme algébrique.

Produit de deux nombres complexes

9 Dans chacun des cas suivants, calcule le produit des nombres complexes z_1 et z_2.

1. $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 + 2i$
2. $z_1 = -4 + 3i$, $z_2 = 5 - 8i$
3. $z_1 = -1 - i$, $z_2 = -7 - 17i$

On mettra chaque résultat obtenu sous forme algébrique.

Inverse d'un nombre complexe

10 Dans chacun des cas suivants, détermine l'inverse du nombre complexe.

1. $1 + i$;
2. $-4 + 3i$;
3. $-8 + 8i$.

On mettra chaque résultat obtenu sous forme algébrique.

Puissance d'un nombre complexe

11 Écris la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$(2 + 3i)^2$; $(2 + 3i)^{-2}$; $(1 + i)^4$; $(1 + i)^{-4}$.

12 Calcule : i^{403} ; i^{2030} ; i^{2022} ; i^{2001}.

Produit nul

13

1. Complète : $z \times z' \neq 0 \Leftrightarrow$ ....

....

2. Soient deux nombres complexes z et z', tels que : $z' \neq 0$ et $zz' = 0$.

Justifie que z est égale à zéro.

14 Résous dans C, $(3z - 2 - i)(z + 2i) = 0$.

Conjugué d'un nombre complexe

15 Détermine le nombre complexe conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

0 ; $1 + i$; $1 - i$; 7 ; -19 ;

$3 - 4i$; $-38 + 6i$.

16 Soit z un nombre complexe.

Justifie que $z\overline{z}$ est un nombre réel positif.

17 Calcule dans chacun des cas suivants :

$z + \overline{z}$; $z - \overline{z}$; $z\overline{z}$

1) $z = 3 + 2i$; 2) $7 + i$.

18 Soient z et z' des nombres complexes, tels que :

$z = 2 + 3i$ et $z' = -1 + 5i$.

Détermine la forme algébrique de :

$\overline{z + z'}$; $\overline{zz'}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Module d'un nombre complexe

19 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 1$,

$z_B = i$, $z_C = -1$ et $z_D = -i$.

Pour chacune des questions suivantes, trois réponses sont proposées, choisi la réponse exacte.

1. L'ensemble des points d'affixe z telle que : $|z + i| = |z - 1|$ est :
   a) La médiatrice du segment [BD] ;
   b) le cercle de centre O et de rayon 1 ;
   c) la médiatrice du segment [AD].
2. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\dfrac{z+i}{z+1}$ est un imaginaire pur est :
   a) Le cercle de diamètre [BD] privé du point C ;
   b) Le cercle de diamètre [CD] privé du point C ;
   c) La médiatrice du segment [AB].

20 Détermine le module de chacun des nombres complexes suivants :

$3 + 4i$; $6 - 8i$ et $\sqrt{2} + \sqrt{7}i$.

21 Soient z et z' deux nombres complexes.

Un élève écrit : $|z| = |z'| \Leftrightarrow z = z'$ ou $z = -z'$.

Donne ton avis argumenté.

22 Justifie que $1 + i$ et $1 - i$ ont le même module.

23 Soient z et z' deux nombres complexes, tels que : $|z| = 2$ et $|z'| = 3$.

Calcule : $|\overline{z}|$; $|-\overline{z}|$; $|zz'|$; $\left|\dfrac{1}{z}\right|$; $\left|\dfrac{z}{z'}\right|$.

Affixe, point-image et vecteur image

24 Soient les points A(–7 ; 5) et B(0 ; 3). Soit le vecteur $\vec{u}$, tel que : $\vec{u}(-3 ; 9)$.

1. Détermine l'affixe du point A.
2. Détermine l'affixe du point B.
3. Détermine l'affixe du vecteur $\vec{u}$.

25

1. Détermine les coordonnées du point image du nombre complexe $1 + i$.
2. Détermine les coordonnées du point image du nombre complexe $-3i$.
3. Détermine les coordonnées du vecteur image du nombre complexe 7.
4. Détermine les coordonnées du vecteur image du nombre complexe $1 + i$.

26 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. A, B et C sont les points de coordonnées respectives (1 ; 1) ; (– 2 ; 3) et (4 ; 3).
Détermine l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

27 Le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
A et B sont des points, tels que : A(–4 ; 3).
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur-image du nombre complexe $1 + i$.
Détermine les coordonnées de B.

28 Recopie et réponds par vrai ou par faux.

1. Deux nombres complexes qui ont le même point image sont égaux. ☐
2. Deux vecteurs qui ont le même affixe sont égaux. ☐
3. Deux vecteurs opposés ont le même affixe. ☐

29 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points P(1 ; –1), Q(4 ; 5) et les vecteurs $\vec{w}(1 ; -2)$ et $\vec{y}(3 ; 4)$.

1. Détermine l'affixe du milieu I de [PQ].
2. Détermine l'affixe du vecteur $\vec{w} + \vec{y}$.
3. Détermine PQ.

30 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{y}$ d'affixes respectives $2 + 3i$ et $4 - 5i$.

1. Détermine l'affixe du vecteur $3\vec{w}$.
2. Détermine l'affixe du vecteur $2\vec{w} - 3\vec{y}$.

Argument d'un nombre complexe

31 En utilisant le cercle trigonométrique, détermine l'argument principal de chacun des nombres complexes suivants :
$1 ; i ; -i ; -1 ; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

32 Recopie et réponds par vrai ou par faux.

a) Tout nombre complexe non nul est parfaitement déterminé par la donnée de son module et de son argument principal. ☐

b) Si des arguments de deux nombres complexes non nuls sont égaux alors ces deux nombres complexes sont égaux. ☐

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

33 Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants : $1 + i\sqrt{3}$; $\sqrt{3} - 3i$; $-\sqrt{2} - i\sqrt{6}$

34 Dans chacun des cas suivants, détermine le nombre complexe z sous forme trigonométrique.
1) $z = 1 - i$; 2) $z = \sqrt{3} - 3i$; 3) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$.

35 Soient z et z' deux nombres complexes, tels que : $\operatorname{ARG}(z) = \frac{\pi}{4}$ et $\operatorname{ARG}(z') = -\frac{\pi}{3}$.
Détermine un argument de chacun des nombres complexes suivants :
zz' ; $\frac{1}{z}$; $\frac{z'}{z}$; $\frac{z}{z'}$; z^2 ; $\frac{z^2}{z'}$.

36 Écris chacun des nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

$(2 + 2i)(1 - i)$; $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2i}$; $\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}$; $(1-i)^4$.

37 Écris chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique.

$\sqrt{2}\,(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3})$; $2(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4})$; $3(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6})$.

Forme exponentielle d'un nombre complexe

38 Soit θ un nombre réel. Parmi les nombres complexes suivants, entoure ceux qui sont écrits sous forme exponentielle.

1) $2e^{i\theta}$; 2) $-3e^{i\theta}$; 3) $7e^{-i\theta}$; 4) $-4e^{-i\theta\frac{\pi}{4}}$.

39 Écris sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants :

a) $2(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3})$; b) $1 + i$; c) $3 + i\sqrt{3}$.

40 Écris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants.

1) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}$; 2) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$;

3) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}+i\cos\frac{\pi}{12}}$; 4) $-2(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3})$.

Formule de Moivre

41 Écris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

1) $(1+i\sqrt{3})^2$; 2) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^3$; 3) $\left(\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{1-i}\right)^3$.

42 Exprime les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

a) $\cos 3x$; b) $\cos 2x + \cos 3x$.

Formules d'Euler

43 Écris sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1) $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}$; 2) $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}}-e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2i}$; 3) $e^{i\frac{3\pi}{4}}+e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

44 Soit θ un nombre réel appartenant à $]0\,;\pi[$.

Écris sous forme trigonométrique chacun des nombres suivants :

1) $e^{i\theta} + 1$; 2) $e^{i\theta} - 1$; $e^{-i\theta} + 1$.

Linéarisation

45 Soit x un nombre réel.

Linéarise les expressions suivantes :

1) $\cos^3 x$; 2) $\sin^2 x\cos^2 x$; 3) $\cos^4 x$; 4) $\sin^5 x$.

Résolution d'équations dans C

46 Détermine les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants :

1) i ; 2) $1 + i$; 3) $\sqrt{3} + i$.

47 Détermine les racines cubiques de chacun des nombres complexes suivants :

1) 1 ; 2) i ; 3) $1 + i$.

48 Détermine les racines cubiques de chacun des nombres complexes suivants, puis place les points-images dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1) 1 ; 2) $1 - i$; 3) -2.

49 Détermine les racines quatrième de 1 puis place les points-images dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

50 Justifie que pour $n \geq 2$, la somme des n racines n-ième d'un nombre complexe non nul est égal à 0.

51

1. Vérifie que :

a) $\bar{j} = -1 - j$; b) $j \times \bar{j} = 1$; c) $j^6 = 1$.

2. Calcule j^{2021}.

52 Résous dans C chacune des équations du second degré suivante :

1) $z^2 + z + 1 = 0$; 2) $z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$;

3) $iz^2 - i\sqrt{3}\,z + 1 = 0$.

Nombre complexe et configuration du plan

53 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Détermine l'ensemble des points M d'affixe z, tels que :

1) $|z - i| = 2$; 2) $|z - 1 + 2i| = |z + 2 - i|$.

54 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives 1, $1 + 2i$ et $1 + \sqrt{3} + i$.

En utilisant les nombres complexes, démontre que le triangle ABC est équilatéral de sens indirect.

Exercices de renforcement / approfondissement

55 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Place dans le plan complexe les points E, F, G et H d'affixes respectives $-3 + i$; $2i$; $-\frac{5}{2}$ et $\frac{3}{2} - 3i$.
2. Détermine les affixes des vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{HE}$ et $2\overrightarrow{FE}$.
3. Détermine l'affixe du milieu I de [EF].

56 On donne : $a = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ et

$b = 3(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$.

1. Écris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants : ab ; ab^2 ; a^2b; $\frac{b}{a^2}$
2. Déduis-en la forme algébrique de ab et $\frac{a}{b}$.

57 Soit $u = 1 + i$ et $v = \sqrt{3} - i$.

1. Calcule le module et un argument de chacun des nombres complexes u et v.
2. a) Donne la forme algébrique et la forme trigonométrique du produit uv.

   b) Déduis la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

58 Exprime les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

a) $\cos 4x$; b) $\cos 5x + \cos 6x$;

c) $\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x$.

59

1. Linéarise : $\cos^4 x$; $\cos^2 x \sin^3 x$; $\cos^5 x - \sin^4 x$.
2. Détermine les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants:

$2i$; $3 + 4i$; $8 + 6i$; $5 - 12i$; $-7 + 24i$.

60 Soit θ un nombre réel appartenant à $[0; \pi[$.

1. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (2^{\theta+1}\cos\theta)z + 2^{2\theta} = 0$.

Donne chaque solution sous forme trigonométrique.

2. Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B dont les affixes sont solutions de l'équation précédente.

Détermine θ afin que OAB soit un triangle équilatéral.

61

1. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

   $z^3 - z^2 - (1 + i)z - 2 + 2i = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.
2. Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$,on considère les points A , B et C dont les affixes sont solutions de l'équation (E).

   a) Place les points A, B et C.

   b) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

62

1. Vérifie que pour tout nombre complexe z,
   $z^4 - 3z^2 - 4 = (z^2 + 1)(z^2 - 4)$.
2. Résous dans C l'équation (E): $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$.
3. Place les images A, B , C et D des solutions de l'équation (E) dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
4. Démontre que les points A, B, C et D sont les sommets d'un losange.

63 Résous dans C l'équation (E) :

$z^3 + (1-5i)\, z^2 - 2(5 + i)z + 8i = 0$ sachant que (E) admet une solution imaginaire pure.

64

1. Détermine les racines cubiques de 1.
2. Calcule $(2 - i)^3$.
3. Déduis les racines cubiques de $2 - 11i$.

65 Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on pose :

$a = \frac{9}{2}(\sqrt{3} - 3i)$.

1. Écris a sous forme trigonométrique.
2. a) Détermine sous forme trigonométrique, les racines cinquièmes de a.

   b) Représente graphiquement les racines cinquièmes de a.

66 A tout nombre complexe z, on associe son image M dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct. Pour tout nombre complexe z différent de i,on pose : $Z = \frac{2z - 4}{z - i}$.

1. Détermine et construis l'ensemble des points M, tels que Z soit un nombre réel.
2. Détermine et construis l'ensemble des points M, tels que Z soit un imaginaire pur.

67 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit f l'application de $C\backslash\{-i\}$ dans C définie par :

$f(z) = \frac{iz}{z + i}$.

1. Détermine l'affixe b du point B, tel que $f(b) = 1 + 2i$.
2. Soit z un élément de $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$. On note r le module de $z + i$ et a une mesure de son argument principal.
   Exprime $f(z) - i$ sous forme trigonométrique.
3. Soit A le point d'affixe $-i$.

   a) Détermine l'ensemble (C) des points M du plan d'affixe z, tels que : $|f(z) - i| = \sqrt{2}$.

   b) Détermine l'ensemble (F) des points M du plan d'affixe z tels que $\frac{\pi}{4}$ soit un argument de $f(z) - i$.

   c) Démontre que B appartient à (C) et (Γ) .

   d) Construis (C) et (Γ).

68 Soit z un nombre complexe, tel que :

$|1 + iz| = |1 - iz|$.

Démontre que z est un nombre réel.

69 Écris sous forme algébrique, chacun des nombres complexes suivants :

1) $2e^{-i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{3\pi}{4}}$; 2) $\frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{3e^{-i\frac{3\pi}{4}}}$; 3) $\frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{3e^{-i\frac{5\pi}{6}}}$.

70 Soit θ un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.

Écris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

1) $\frac{\tan\theta - i}{\tan\theta + i}$; 2) $\frac{1}{1 + i\tan\theta}$; 3) $e^{i\theta} + e^{2i\theta}$;

4) $\frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}$.

71 Détermine les racines quatrièmes de 81 puis place les points images de ces racines dans le plan.

72 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Calcul les racines $n^{\text{ième}}$ de $-i$ et de $1 + i$.

2. On considère l'équation (E) :

$z^6 + (7 - i)z^3 - 8 - 8i = 0$

a) Calcule $(9 + i)^2$.

b) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

73 Trouve tous les entiers naturels n, tels que

$(1 + i\sqrt{3})^n$ soit un nombre réel positif.

74 Soit z un nombre complexe différent de 1.

Démontre que :

$|z|$ est égal à 1 si et seulement si $\frac{1 + z}{1 - z}$ est un imaginaire pur.

75

1. a) Justifie que pour tout nombre complexe z, on a : $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$.

   b) Montre dans quel cas a-t-on l'égalité $\mathrm{Re}(z) = |z|$.

2. a) Démontre que pour tout couple de nombres complexes $(z_1 ; z_2)$, on a : $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

   b) On suppose de plus que z_1 et z_2 sont des nombres complexes non nuls. Justifie que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si il existe un nombre réel positif λ, tel que $z_2 = \lambda z_1$.

3. a) Démontre par récurrence que pour tout n−*uplet* ($n \geq 2$), $(z_1, z_2, \dots z_n)$ de nombres complexes, on a : $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$

   b) Démontre que si $z_1, \dots, z_n$ sont tous non nuls, alors l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si il existe des nombres réels strictement positifs $\lambda_2, \dots, \lambda_n$, tels que pour tout $k = 1, \dots, n$, on a : $z_k = \lambda_k z_1$.

76 En électricité, on peut caractériser le comportement d'un dipôle passif linéaire en régime sinusoïdal avec un nombre complexe que l'on appelle « impédance complexe »;

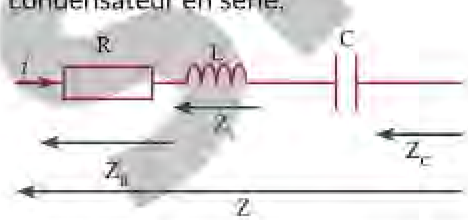
Ainsi :

- l'impédance complexe d'une résistance est :

  z_R = R (R est la résistance en ohms);
- L'impédance complexe d'une bobine est z_L = jLω où L est l'inductance en henry et ω la pulsation du courant en rad/s;
- L'impédance complexe d'un condensateur est :

  $Zc = \dfrac{1}{jC\omega}$ où C est la capacité en farad et ω la pulsation du courant en rad/s.

On associe une résistance, une bobine et un condensateur en série.



L'impédance complexe de l'association est :

$Z = Z_R + Z_L + Z_C$.

1. Détermine l'expression de la partie réelle de l'impédance complexe Z.

2. La résistance X correspond à la partie imaginaire de Z. Détermine X.

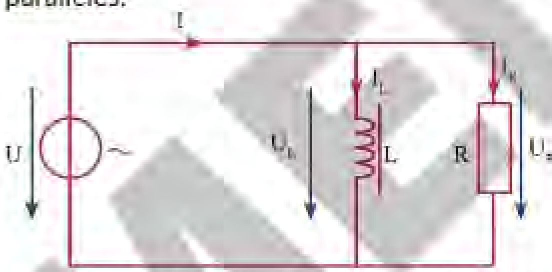
3. L'impédance de l'association (en ohm) correspond au module de l'impédance complexe.

Détermine l'impédance de l'association.

4. Le déphase entre tension et courant est donné par l'argument de l'impédance complexe.

Détermine le déphase entre tension et courant.

77 On associe une résistance et une bobine en parallèles.



L'impédance complexe de l'association est :

$Z = \dfrac{Z_R \times Z_L}{Z_R + Z_L}$ où : Z_R est la résistance de R et Z_L celle de L

1. L'impédance de l'association (en ohm) correspond au module de l'impédance complexe.

Détermine l'impédance de l'association.

2. Le déphase entre tension et courant est donné par l'argument de l'impédance complexe.

Détermine le déphase entre tension et courant.

3. En électricité, on peut caractériser le comportement d'un filtre avec un nombre complexe que l'on appelle « fonction de transfert »

Voici la fonction de transfert d'un filtre RC passe-bas du premier ordre. $T = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$.

d) L'amplification d'un filtre correspond au module de la fonction de transfert.
Détermine son expression.

e) Le déphase entre la sortie et l'entrée est fourni par l'argument de la fonction de transfert.
Détermine son expression.

78 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où z est un nombre complexe.

1. Justifie que si le nombre z est solution de l'équation (E), alors les nombres complexes $-z$ et $\bar{z}$ sont aussi solutions de l'équation (E).

2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$.
   a) Écris le nombre complexe z_0 sous forme exponentielle.
   b) Vérifie que z_0 est solution de l'équation (E).
3. Déduis des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

Pour la suite on donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 + i$; $z_B = -1 + i$, $z_C = -1 - i$; $z_D = 1 - i$.

On considère l'application qui, au nombre complexe z, associe le nombre complexe z' tel que : $z' - z_C = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - z_C)$.

On appelle z_E l'image du nombre complexe z_B et z_F l'image du nombre complexe z_D.

4. Justifie que : $z_E = -1 + \sqrt{3}$.
5. Détermine l'affixe zF.
6. Démontre que $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un nombre réel.
7. Justifie que les points A, E et F sont alignés.

Situations complexes

79 Un jeu concours de mathématiques réunit chaque année les meilleurs élèves des classes de terminal C d'une ville.

Voici une question posée à l'édition 2021 de ce concours :

«le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Détermine l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation :

$\arg\left(\dfrac{z - 2i}{z - 1 + i}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$».

À l'issu de ce concours, deux de tes amis ont proposé deux réponses différentes à cette question. l'un affirme qu'il s'agit d'une droite, tandis que l'autre affirme avoir proposé un cercle.

Etant l'un des meilleurs élèves de terminal C de ta promotion, ils te sollicitent.

Départage-les en caractérisant ce ensemble grâce à une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques.

80 Un jeu concours oppose les élèves de terminale D de ton lycée.

Le prix à remporter à l'issue du jeu par le gagnant est une bourse d'étude aux États-Unis après le baccalauréat.

Le jeu est le suivant :

"Construire un hexagone régulier de rayon quelconque et justifier cette construction à l'aide des nombres complexes"

Le jury te propose une piste : " Choisir un point O et tracer un cercle de centre O. Marquer sur le cercle un point A qui est un des sommets de l'hexagone, puis avec un écartement égal au rayon, marquer les autres sommets".

Tu es candidat à ce jeu, propose ta solution argumentée.

7 FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

Commentaire de la Leçon

La notation exponentielle n'a été introduite qu'au XVIème siècle avec l'apport du mathématicien Écossais John Néper. C'est au XVIIIème siècle, après la mise en place de la notion de fonction qu'Euler (1707 - 1783) définit clairement les fonctions exponentielles et les fonctions puissances.

De nombreux modèles mathématiques et économiques utilisés aujourd'hui intègrent des fonctions de type exponentielle. En particulier, les mathématiques de la finance et de l'assurance, que l'on qualifie de Mathématiques actuarielles, exploitent pleinement les propriétés de ces fonctions indispensables.

L'exponentielle est la seconde des deux fonctions introduites en terminale. On la définit comme étant la réciproque de la fonction logarithme népérien.

Habiletés et Contenus

- ✓ **Connaître** la définition de la fonction exponentielle népérienne ; la définition d'une fonction exponentielle de base a ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$) ; la définition d'une fonction puissance d'exposant réel non nul ; les propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne ; la dérivée de la fonction exponentielle népérienne ; le sens de variation de la fonction exponentielle népérienne ; la représentation graphique de la fonction exponentielle népérienne ; les propriétés algébriques de la fonction exponentielle de base a ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$) ; les propriétés algébriques de la fonction puissance d'exposant réel non nul ; l'allure de la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x^{\alpha}$; $\alpha \neq 0$ suivant que $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$; les limites de référence de la fonction exponentielle népérienne ; les fonctions dérivées des fonctions du type : expo u et u^{α}, $\alpha \in \mathbb{R}^*$; les primitives des fonctions du type: $u'e^{u}$ et $u'u^{m}$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; les propriétés relatives à la croissance comparée des fonctions logarithme népérien, exponentielles et puissances
- ✓ **Noter** la fonction exponentielle népérienne ; une fonction exponentielle de base a ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$) ; une fonction puissance d'exposant réel non nul
- ✓ **Résoudre** des équations ou inéquations faisant intervenir des fonctions exponentielles
- ✓ **Déterminer** les dérivées des fonctions du type : expou et u^{α}($\alpha \in \mathbb{R}^*$) ; les primitives des fonctions du type: $u'e^{u}$; $u'u^{m}, m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- ✓ **Représenter** graphiquement les fonctions du type : expou et u^{α}($\alpha \in \mathbb{R}^*$) ; graphiquement une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne ; graphiquement une fonction faisant intervenir une fonction puissance d'exposant réel non nul
- ✓ **Utiliser** les propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne pour transformer une écriture ; les limites de référence pour calculer d'autres limites ; les limites sur la croissance comparée pour calculer d'autres limites
- ✓ **Étudier** les propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne pour transformer une écriture ; les limites de référence pour calculer d'autres limites ; les limites sur la croissance comparée pour calculer d'autres limites
- ✓ **Traiter une situation** faisant appel aux fonctions exponentielles et puissances

Situation d'Apprentissage

Pour son premier stage pratique dans l'infirmerie de ton établissement, un étudiant en médecine reçoit un élève malade. Il lui donne un médicament, et celui-ci le prend immédiatement.

La fonction qui modélise la masse M, en mg, de ce médicament encore présent dans son sang t heures après sa prise du médicament est la fonction M telle que : $M(t) = 50.e^{-0,75\,t}$.
En vue de prescrire si possible d'autres médicaments plus tard, le stagiaire désire visualiser cette masse M en fonction du temps t. Il sollicite ton professeur de Sciences de la Vie et de la Terre (SVT).
Ce dernier associe ta classe au projet. Motivés pour la cause, les élèves de la classe s'organisent et décident de faire des recherches sur les fonctions comportant la fonction exponentielle népérienne et les représenter graphiquement en vu de résoudre le problème posé.

Activité 1 Définition et Propriétés

Soit f une bijection d'un ensemble A sur un ensemble B et f^{-1}, sa bijection réciproque.

- Pour tous x élément de A, détermine $f^{-1} \circ f(x)$.
- Pour tous y élément de B, détermine $f \circ f^{-1}(x)$.

La fonction ln est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

1. En notant exp sa bijection réciproque, détermine l'ensemble de définition de la fonction exp.
2. Détermine le signe de la fonction exp.
3. Détermine $exp\,[\ln x]$ pour tout nombre réel strictement positif x.
4. Détermine $\ln[exp\,(x)]$ pour tout nombre réel x.
5. Calcule $exp\,(0)$; $exp\,(1)$.
6. Soit r un nombre rationnel, justifie que : $\ln(e^r) = r$ puis déduis-en que : $exp\,(r) = e^r$
   (On admet que : $\forall x \in \mathbb{R},\ exp\,(x) = e^x$)
7. Recopie dans ton cahier et complète : $\forall y \in]0\,;+\infty[,\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^x = y \Leftrightarrow x = \cdots$

Récapitulons

La fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction ln.

La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0;+\infty[$, donc elle est définie sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in\ ]0;+\infty[,\ \exp\,[\ln x] = x$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln[exp\,(x)] = x$.

$\forall y \in]0;+\infty[,\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$.

On admet que : $\forall x \in \mathbb{R},\ exp\,(x) = e^x$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x$ et $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ e^{\ln x} = x$.

Exercice de fixation

1 Recopie le numéro de l'affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	La fonction exponentielle népérienne est une bijection.
2	La fonction exponentielle népérienne est la réciproque de la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.
3	L'ensemble de définition de la fonction exponentielle népérienne est $\mathbb{R}$.
4	La fonction exponentielle népérienne est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
5	-20 est inférieur à 0 donc $exp\,(-20)$ est inférieur à 0.
6	$\ln e^{\ln 4} = \ln 4$.
7	$e^{\ln 2} = 2\ln 2$.
8	$e^{\ln 3} = 3$.
9	$y = \ln 4 \Leftrightarrow e^y = 4$.

Activité 2 Propriétés algébriques

Soit a et b deux nombres réels et r un nombre rationnel.

1. En utilisant $\ln(e^x) = x$, démontre que : $e^{a+b} = e^a \times e^b$.
2. Calcule $e^a \times e^{-a}$; déduis-en une relation entre e^a et e^{-a}.
3. Calcule e^{a-b} ; déduis-en une relation entre $\frac{e^a}{e^b}$ et e^{a-b}.
4. Justifie que : $e^{ra} = (e^a)^r$.

Récapitulons

Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre rationnel r, on a :

$e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $e^{ra} = \left(e^a\right)^r$

Exercices de fixation

2 Écris sous la forme e^a, où a est un nombre réel, les nombres réels suivants :

a) $\frac{e^7}{e^3}$; b) $\left(e^{-5}\right)^6 \times e^3$;

c) $\frac{e^7 \times e^{-4}}{e^3}$; d) $\frac{e^{1+\ln 3}}{e^{2+\ln 3}}$.

3 Écris sous la forme e^a, où a est un nombre réel, les nombres réels suivants :

a) $\frac{1}{\left(e^{-3}\right)^2} \times \frac{\left(e^4\right)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$; b) $\left(e^{-2}\right)^{-3} \times \left(e^{-4}\right)^2$.

Activité 3 Sens de variation de la fonction exponentielle

Soit a et b deux nombres réels.

1. a) Justifie que la fonction : $x \longmapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   b) Justifie que $e^a = e^b$ équivaut à : $a = b$.
2. Recopie et complète :

   a) $e^a < e^b$ équivaut à ...

   b) $e^a < 1$ équivaut à ...

Récapitulons

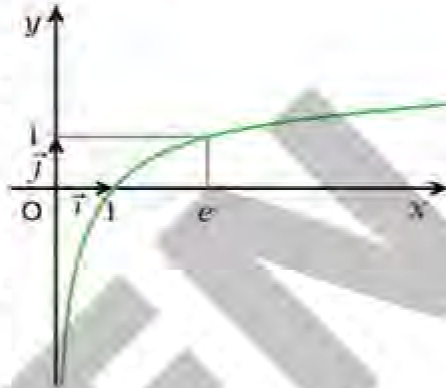
Pour tous nombres réels a et b, on a :
$e^a = e^b$ équivaut à : $a = b$.
$e^a < e^b$ équivaut à : $a < b$.
$e^a < 1$ équivaut à : $a < 0$.

Exercice de fixation

4 Recopie la lettre de l'affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

	Affirmations
a	$e^x = 2 \Leftrightarrow x = 2$
b	$e^x > 2 \Leftrightarrow \ln 2 < x$
c	$\ln e^x < 3 \Leftrightarrow x > 3$
d	$x > -1 \Leftrightarrow e^{-1} < e^x$

Activité 4 Limites, dérivée et représentation graphique de la fonction *exp*



1. Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). On considère la fonction ln dont la représentation graphique (C_{ln}) est ci-contre. Reproduis et construis (Cf), le symétrique de (C_{ln}) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.
2. Justifie que la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis détermine $(exp'(x))$. (*On utilisera la propriété de la dérivée de la bijection réciproque d'une fonction*).
3. a) Dresse le tableau de variation de la fonction ln ; déduis-en celui de la fonction exp.

   b) Déduis-en les limites suivantes :
4. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$

   b) Précise la nature de la branche parabolique de la courbe (C_f) ; déduis-en $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$.

   c) En utilisant le nombre dérivé au point d'abscisse 0 de la fonction : $x \mapsto e^x$, détermine $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

Récapitulons

La courbe de la fonction exponentielle est le symétrique de celle de la fonction logarithme népérien par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Les limites ci-dessous, sont appelées des limites de référence :
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Exercices de fixation

5 Calcule chacune des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-2e^x + x\right)$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x}$; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - x\right)$; d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 + e^x}{e^x}$;

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - \ln x\right)$; f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x + 4e^x\right)$.

6 Construis la courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^{-x}$. Explique ta méthode.

Activité 5 Ensemble de définition et dérivée des fonctions du type : e^u

Soit f une fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x) = e^{u(x)}$ où u est une fonction quelconque définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. On suppose que u est dérivable sur un intervalle K. Justifie que f est dérivable sur K.
3. En appliquant la propriété sur la dérivée de la composée de deux fonctions, détermine $f'(x)$ pour tout x élément de K.

Récapitulons

L'ensemble de définition de la fonction : $x \longmapsto e^{u(x)}$ est l'ensemble de définition de la fonction : $x \longmapsto u(x)$.
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K. La fonction e^{u} est dérivable sur K et on a : $(e^{u})' = u'e^{u}$.

Exercices de fixation

7 Soit h la fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et définie par : $h(x) = e^{\sqrt{2x}}$.

Recopie la lettre correspondant à la bonne réponse :

a) $h'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{2x}}$; b) $h'(x) = \dfrac{\sqrt{2x}}{2x}e^{\sqrt{2x}}$;

c) $h'(x) = \sqrt{2x}e^{\sqrt{2x}}$.

8 Détermine sur $\mathbb{R}$, la fonction dérivée de chacune des fonctions définies par :

a) $f(x) = e^{2x+1}$; b) $g(x) = 2e^{x^2}$;

c) $k(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$; d) $l(x) = \dfrac{e^{3x-1}}{x^2+1}$.

Activité 6 Équations faisant intervenir la fonction exp

Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $e^{2x} - 2e^{x} = 15$.
On posera $X = e^{x}$.
Propose une méthode de résolution d'une équation faisant intervenir la fonction *exp*.

Récapitulons

Pour résoudre une équation faisant intervenir la fonction exp, on peut effectuer un changement de variable et appliquer la propriété : $e^{a} = e^{b}$ équivaut à $a = b$

Exercice de fixation

9 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $e^{3x} - 5e^{x} = 0$; b) $e^{3x+4} = 2$; c) $e^{\sin x} = \sqrt{e}$; d) $e^{-x} = 2e^{x}$;
e) $e^{2x} - 3e^{x} + 3 = 0$; f) $e^{3x}(e^{x+3} - 1) = 0$.

Activité 7 Inéquations faisant intervenir la fonction *exp*

Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $2e^{2x} - 3e^{x} - 2 < 0$.
On posera $X = e^{x}$.
Propose une méthode de résolution d'une inéquation faisant intervenir la fonction *exp*.

Récapitulons

Pour résoudre une équation faisant intervenir la fonction *exp*, on peut effectuer un changement de variable et appliquer la propriété : $e^{a} < e^{b}$ équivaut à $a < b$.

Exercice de fixation

11 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

a) $3e^{2x} - 16e^{x} + 5 \geq 0$; b) $e^{2x+3} < \ln 3$; c) $\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} < -1$; d) $2e^{2x+1} - 3e^{x} + 1 < 2e$.

Activité 8 Primitive de $u'e^{u}$

Dans chacun des cas suivants, f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

Cas 1) $f(x)=e^{-5x+9}$; $g(x)=-\dfrac{1}{5}e^{-5x+9}$ Cas 2) $f(x)=e^{\cos x}$; $g(x)=\sin x e^{\cos x}$

Cas 3) $f(x)=e^{3x^2-6x-11}$; $g(x)=(x-1)e^{3x^2-6x-11}$ Cas 4) $f(x)=e^{u(x)}$; $g(x)=u'e^{u(x)}$

a) Détermine dans chaque cas, la dérivée de la fonction f, puis déduis-en une primitive de la fonction g.

b) Émet une conjecture relative à une primitive sur un intervalle K des fonctions du type $u'e^{u}$ où u est une fonction dérivable sur K.

Récapitulons

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K. La fonction $u'e^{u}$ admet pour primitive sur K , la fonction e^{u}.

Exercices de fixation

12 Détermine une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes, définies par :

a) $f(x) = 4e^{4x-2}$; b) $g(x) = 2xe^{x^2}$;

c) $h(x) = (x+2)e^{x^2+4x+1}$.

13 Détermine une primitive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ de la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{2\cos^2 x}e^{\tan x}$.

Activité 9 Définition et propriétés algébriques de la fonction exponentielle de base a ($a > 0$ et $a \neq 1$)

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. Pour tout nombre réel x, on pose : $a^{x} = e^{x\ln a}$.

On désigne par exp_a la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $exp_a(x) = a^{x}$.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction exp_a.
2. Démontre que pour tous nombres réels strictement positifs a et b et pour tous nombres réels x et y, on a :

a) $a^{x+y} = a^{x} \times a^{y}$; b) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^{x}}$; c) $a^{x-y} = \dfrac{a^{x}}{a^{y}}$; d) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{x} = \dfrac{a^{x}}{b^{x}}$;

e) $(ab)^{x} = a^{x} \times a^{x}$; f) $(a^{x})^{y} = a^{xy}$.

Récapitulons

- Pour tout nombre réel x, on pose : $a^x = e^{x\ln a}$.
- On définit ainsi Exp_a appelé fonction de base a.
- Pour tout nombre réel a et b strictement positifs et pour tous nombres réels x et y, on a :

$$a^{x+y} = a^x a^y \ ; \ a^{-y} = \frac{1}{a^y} \ ; \ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \ ; \ (ab)^x = a^x b^x \ ; \ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \ ; \ (a^x)^y = a^{xy}$$

Exercice de fixation

14 Écris les expressions suivantes sous la forme $e^{u(x)}$.

a) $f(x) = 2^x$; b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; c) $h(x) = \frac{3^x}{5^x}$.

15 Recopie et complète :

$\sqrt{3}\ln 6 = \ln\ldots$; $\ln 7^{\pi} = \ldots\ln\ldots$; $\sqrt{2}\ln 5 = \ln\ldots$

16 x est un nombre réel quelconque, écris chacun des nombres suivants sous la forme a^x.

a) $2^{2+x} \times 2^{-2x}$; b) $\frac{2^x}{5^x}$; c) $7^{2-x} \times 7^{-2x}$.

Activité 10 Étude de la fonction exp_a

1. Justifie que la fonction exp_a est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0\,;+\infty[$.
2. Étudie selon les valeurs de a les limites de la fonction exp_a.
3. Justifie que :
   a) la fonction exp_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(exp_a)'(x) = (\ln a) \times a^x$.
   b) Si $0 < a < 1$, alors la fonction exp_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
   c) Si $a > 1$, alors la fonction exp_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Dresse selon les valeurs de a le tableau de variation de la fonction exp_a.
5. Étudie selon les valeurs de a la nature de la branche parabolique de la courbe représentative de la fonction exp_a
6. Justifie que :
   a) x et y étant deux nombres réels, $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.
   b) Si $0 < a < 1$ et x et y étant deux nombres réels, $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$.
   c) Si $a > 1$ et x et y étant deux nombres réels , $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$.

Récapitulons

L'étude de la fonction exp_a se ramène à celle de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $]0\,;+\infty[$, définie par : $f(x) = e^{x\ln a}$.
La consigne 6 permet de résoudre des équations ou inéquations comportant la fonction exp_a.

Exercices de fixation

17 Étudie et représente graphiquement fonction :

$x \mapsto 5^x$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

18 Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$2 \times 9^x - 5 \times 3^x + 2 = 0$.

19 Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $2 \times 9^x - 5 \times 3^x + 2 > 0$.

20 Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $2^x < 2^{-x}$.

21 Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $(0,5)^x > 6$.

22 Soit h la fonction dérivable sur $]0\ ;-\infty[$ et définie par : $h(x)=(2x-1)^{\sqrt{2}}$.

Étudie et représente graphiquement la fonction h dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Activité 11 Propriétés algébriques et étude de la fonction puissance.

x est un nombre réel strictement positif et α, un nombre réel quelconque la fonction puissance d'exposant α est la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$, par $f(x) = x^{\alpha}$.

On note (C_{α}) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Vérifie que : $\forall x \in\ ]0\ ;+\infty[,\ x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$.
3. Justifie que f est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et que $\forall x \in\ ]0\ ;+\infty[,\ f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
4. Étudie selon le signe de α, le signe de $f'(x)$.
5. Justifie que :
   a) si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty$ = +∞ et $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha} = 0$.
   b) si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha} = +\infty$.
6. a) Justifie que lorsque $\alpha < 0$, la droite (OI) est asymptote à la courbe $(C\alpha)$.
   b) Justifie que lorsque $0 < \alpha < 1$, la courbe $(C\alpha)$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OI).
   c) Justifie que lorsque $\alpha > 1$, la courbe $(C\alpha)$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).
7. Dresse selon les valeurs de α, le tableau de variation de la fonction f.
8. Construis dans le même repère les courbe $(C\alpha)$ pour α égal respectivement à : $\dfrac{-2}{3}$; $\dfrac{1}{3}$ et $\sqrt{2}$.

Récapitulons

L'étude de la fonction puissance d'exposant α se ramène à celle de la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $]0\ ;+\infty[$, définie par : $g(x) = e^{\alpha \ln x}$.

Exercice de fixation

22 Soit h la fonction dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et définie par : $h(x)=(2x-1)^{\sqrt{2}}$.

Étudie et représente graphiquement la fonction h dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Activité 12 — Étude des fonctions du type : $x \longmapsto u(x)^{\alpha}$, ou u est une fonction strictement positive sur un intervalle I

Soit g la fonction dérivable sur]0 ; +∞ [et définie par : $g(x) = x^{\sqrt{3}}$.
Étudie et représente graphiquement la fonction g dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

a) Ensemble de définition

La fonction g est définie sur]0 ; +∞[.

b) Dérivée et sens de variation

La fonction g est dérivable sur]0 ; +∞ [et $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ g'(x) = \sqrt{3}\,x^{\sqrt{3}-1}$

$\alpha = \sqrt{3}$. α > 0, donc la fonction g est strictement croissante sur]0 ; +∞[.

α > 0. On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\sqrt{3}} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^{\sqrt{3}} = 0$.

Remarques

On peut écrire : $x^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\ln x}$ et retrouver tous les résultats précédents.

c) Branche infinie

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\sqrt{3}}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\sqrt{3}-1}$, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\sqrt{3}}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\left(\sqrt{3}-1\right)\ln x}$.

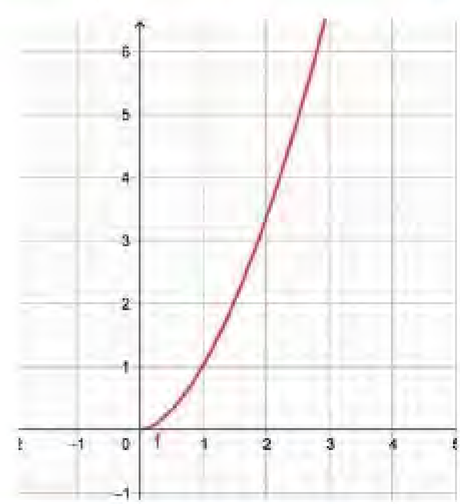
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3}-1\right)\ln x = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\left(\sqrt{3}-1\right)\ln x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\sqrt{3}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\sqrt{3}}}{x} = +\infty$, donc la courbe de la fonction g admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).

d) Tableau de variation de la fonction g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	0	$+\infty$

e) Courbe représentative de la fonction g



À partir de cet exemple, propose une démarche pour étudier les fonctions du types : $x \mapsto u(x)^{\alpha}$.

Récapitulons

L'étude de la fonction des fonctions du type : $x \longmapsto u(x)^{\alpha}$, ou u est une fonction strictement positive sur un intervalle I se ramène à celle de la fonction g de ℝ vers]0 ; +∞[, définie par : g(x) = $e^{\alpha(\ln(u(x)))}$.

Exercices de fixation

23 Recopie le numéro de l'affirmation suivi de V si l'affirmation est vrai ou de F si l'affirmation est fausse.

	Affirmations
1	La fonction : $x \mapsto (3x-1)^{\ln 2}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$
2	La fonction : $x \mapsto (e^{x-1})^{\ln 2}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty\,[$
3	$\forall x \in\,]0\,;+\infty\,[$, $[(e^x-1)^{\ln 2}]' = \ln 2\, e^x\,(e^x-1)^{-1+\ln 2}$

24 Soit h la fonction dérivable sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et définie par : $h(x)=(2x-1)^{\sqrt{2}}$.

Étudie et représente graphiquement la fonction h dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

25 La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calcule $g'(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $g(x) = \left(1+e^{-2x}\right)^{\sqrt{7}}$; b) $g(x) = \left(x^2+e^{-x}\right)^{\ln 2}$;

c) $g(x) = \left(3e^x+e^{-x}\right)^{\ln 2}$.

Activité 13 Primitives de $u'u^{\alpha}$

Soit α un nombre réel différent de -1 et u une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Calcule la dérivée sur I de la fonction : $x \mapsto \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}(x)$.
2. Déduis-en une primitive sur I de la fonction : $x \mapsto u'(x)u(x)^{\alpha}$.

Récapitulons

Soit α un nombre réel différent de -1 et u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Les primitives sur I d'une fonction f telle que : $f(x) = u'(x)u(x)^{\alpha}$ sont les fonctions F telle que :
$F(x) = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}(x) + C$, où C est une constante réelle.

Exercice de fixation

26

a) Détermine une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto (e^x)^{1+\ln 2}$.
b) Détermine une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto (1-3e^{-3x})(x+e^{-3x})^{-1+\ln 3}$.

Activité 14 Croissance comparée des fonctions : $x \mapsto \ln x$; $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x^{\alpha}$

Soit α un nombre réel strictement positif, justifie les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^{\alpha}} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha}\ln x = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}e^{-x} = 0$

Récapitulons

Ces résultats permettent de comparer la croissante des fonctions ln, puissance et exponentielle.

Exercice de fixation

27 Calcule : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x+1}-e^x}{x^3-1}$.

I. Fonction exponentielle néperienne

Définition et propriété

On appelle fonction exponentielle népérienne, la bijection réciproque de la fonction logarithme néperien. Elle est noté *exp*.

Conséquences

a)La fonction ln est une bijection de]0;+∞ [sur $\mathbb{R}$, donc la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur]0;+∞[.

b) La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.

c) $\forall\, a \in \mathbb{R}$; $\forall\, b \in \mathbb{R}_+^*$; $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b$ et $\ln b = a \Leftrightarrow b = e^a$.

d) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ et $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.

e) $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$; $e^{\ln x} = x$ et $\forall\, y \in \mathbb{R}$; $\ln e^y = y$.

f) La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, on a : $(exp)'(x) = exp(x)$.

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre rationnel r, on a :

$$e^{a+b} = e^a e^b \;;\; e^{-a} = \frac{1}{e^a} \;;\; e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \;;\; \left(e^a\right)^b = e^{ab} = \left(e^b\right)^a \;;\; e^{ra} = \left(e^a\right)^r$$

Exemple d'application

$e^5 \times e^2 = e^7$

$e^{-4} = e^{-2} \times e^{-2}$

$e^{-4} = \dfrac{1}{e^4}$; $\dfrac{e^{-2}}{e^8} = e^{-2-8}$, donc $\dfrac{e^{-2}}{e^8} = e^{-10}$;

$\left(e^{-5}\right)^3 = e^{-5\times 3}$, donc $\left(e^{-5}\right)^3 = e^{-15}$.

II. Étude de la fonction exponentielle

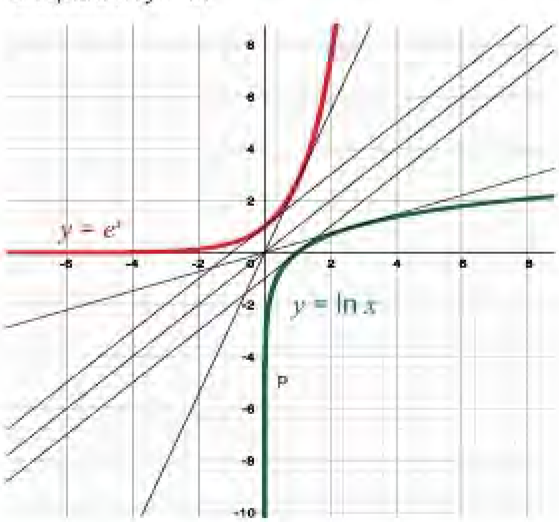
Sens de variation

La fonction exponentielle est strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers]0;+∞[. On en déduit le tableau de variation ci-dessous.

x	−∞	+∞
exp	+	
Exp	0 ↗	+∞

Courbe représentative

La courbe de la fonction exponentielle dans le plan rapporté à un repère orthonormé est le symétrique de celle de la fonction logarithme népérien par rapport à la droite d'équation $y = x$.



III. Les limites de références

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Exemple

1. Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x)$.

$e^x - x = x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$; Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$,

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x) = +\infty$.

2. Calculons : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1}$.

$\frac{\sin x}{e^x - 1} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{e^x - 1}$. Or : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$, donc : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = 1$.

IV. Dérivée - Primitives

Dérivées

Propriétés

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$.

Exemple

Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = xe^{-x^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^{-x^2} + x(-2xe^{-x^2})$

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$.

Primitives

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction $x \longmapsto u'e^{u(x)}$ admet pour primitive sur I la fonction $x \longmapsto e^{u(x)} + c$; $c \in \mathbb{R}$.

Exemple

- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto xe^{x^2}$ est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{2} e^{x^2}$.
- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto \cos xe^{\sin x}$ est la fonction : $x \mapsto e^{\sin x}$.

V. Fonction exponentielle de base a ($a > 0$)

Définition

Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout x, on pose : $a^x = e^{x\ln a}$.
On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction $exp(x)_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto a^x$

Exemple

- La fonction exponentielle de base e est la fonction exp.
- La fonction exponentielle de base 10 est la bijection réciproque de la fonction log.

Propriété 1

Pour tout nombre réel a strictement positif et pour tout nombre réel x, on a : $\ln a^x = x \ln a$.

Propriété 2

Pour tout nombre réel a et b strictement positifs et pour tous nombres réels x et y, on a :

$$a^{x+y} = a^x a^y \; ; \; a^{-y} = \frac{1}{a^y} \; ; \; a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \; ; \; (ab)^x = a^x b^x \; ; \; \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \; ; \; \left(a^x\right)^y = a^{xy}$$

Exemple d'application1

x est un nombre réel quelconque.
$\ln 3^x = x \ln 3$; $\ln e^{5x} = 5x \ln e = 5x$;
$\ln e^{-5} = -5 \ln e = -5$.

Exemple d'application2

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$4^x - 2^{x+2} - 5 = 0$.
$4^x - 2^{x+2} - 5 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 4 \times 2^x - 5 = 0$.
Posons $X = 2^x$, $X > 0$.
$(2^x)^2 - 4 \times 2^x - 5 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 4X - 5 = 0$.
$X^2 - 4X - 5 = 0 \Leftrightarrow (X - 5)(X + 1) = 0$.
$(X - 5)(X + 1) = 0 \Leftrightarrow X = 5$ ou $X = -1$.
Comme X est positif, on a : X = 5.
$2^x = 5 \Leftrightarrow x\ln 2 = \ln 5$, soit : $x = \dfrac{\ln 5}{\ln 2}$.
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation
$4^x - 2^{x+2} - 5 = 0$ est : $\left\{\dfrac{\ln 5}{\ln 2}\right\}$.

VI. Étude de la fonction $f_a : x \longmapsto a^x$

Dans cette étude, (C_a) désigne la courbe représentative de la fonction f_a dans le plan rapporté à un repère orthonormé. a est un nombre réel strictement positif et différent de 1.

Ensemble de définition

On a : $Df_a = \mathbb{R}$.

Dérivée et sens de variation	
On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $a^x = e^{x\ln a}$; donc la fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f_a' telle que $f_a'(x) = (\ln a)\, e^{x\ln a} = a^{x\ln a}$; f_a' est du signe de $\ln a$; on distingue deux cas : $0 < a < 1$ et $a > 1$	
1er cas: $0 < a < 1$ On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) < 0$; donc, f_a est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$	**2eme cas: $a > 1$** On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) > 0$; donc, f_a est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
Étude aux bornes de l'ensemble de définition	
1er cas: $0 < a < 1$ On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ La droite (OI) est asymptote à (C_a) en $+\infty$. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a^x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln a \frac{e^{x\ln a}}{x\ln a}\right) = -\infty$. (C_a) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $-\infty$.	**2eme cas: $a > 1$** On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ La droite (OI) est asymptote à (C_a) en $-\infty$. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln a \frac{e^{x\ln a}}{x\ln a}\right) = +\infty$. (C_a) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) $+\infty$.

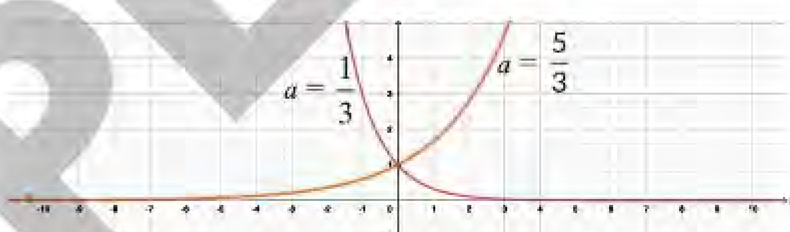
Tableaux de variation

1^{er} cas: $0 < a < 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f_a'(x)$				
$f_a(x)$	$+\infty$ ↘	1 ↘	a ↘	0

$2^{ème}$ cas: $a > 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f_a'(x)$				
$f_a(x)$	0 ↗	1 ↗	a ↗	$+\infty$



VII. FONCTIONS PUISSANCES D'EXPOSANT $\propto$

Définition

Soit $\propto$ un nombre réel non nul.
Pour tout nombre réel strictement positif x : $x^{\propto} = e^{\propto\ln x}$.
On appelle fonction puissance d'exposant $\propto$, la fonction : $x \to x^{\propto}$.

Exemple

La fonction puissance d'exposant $\frac{1}{3}$ est la fonction : $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$.

Fonction u^{α} ($\alpha \in \mathbb{R}$)

Propriété

Soit α un nombre réel et u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

La fonction u^{α} est dérivable sur K et on a : $(u^{\alpha})' = \alpha u' u^{\alpha-1}$.

Exemple d'application

La fonction : $x \mapsto (\ln x)^{\pi}$ est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction :

$x \mapsto \dfrac{\pi}{x}(\ln x)^{\pi-1}$.

Primitive des fonctions du type : $u'u^{\alpha}$ (α est un nombre réel strictement positif et différent de -1)

Propriété

Soit α un nombre réel différent de -1, u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $u'u^{\alpha}$ admet pour primitive sur I la fonction $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Exemple d'application

Une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction :

$x \mapsto \dfrac{(-2+\ln x)^{\sqrt{3}}}{x}$ est la fonction : $x \mapsto \dfrac{(-2+\ln x)^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1}$.

Croissance comparée des fonctions : $x \mapsto \ln x$; $x \mapsto e^x$; $x \mapsto x^{\alpha}$

Limites de références

Soit α un nombre réel strictement positif. On a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha}\ln x = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^{\alpha}} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\alpha}e^{-x} = 0$.

QUESTION 1

Comment déterminer l'ensemble de définition des fonctions du type $e^{u(x)}$?

Méthode

Pour déterminer l'ensemble de définition des fonctions du type : $e^{u(x)}$, on détermine l'ensemble de définition de la fonction u et on conclut.

Exercice

Détermine l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto e^{\sqrt{2-3x}}$.

Solution commentée

f est définie si et seulement si :

$2 - 3x \geq 0$

$-3x \geq -2$

$3x \leq 2$

$x \leq \frac{2}{3}$, donc : $D_f =]-\infty ; \frac{2}{3}]$

Exercice non corrigé

Détermine l'ensemble de définition de la fonction g définie par : $g(x) = e^{\frac{1}{2-\sqrt{x}}}$.

QUESTION 2

Comment résoudre une équation comportant des exponentielles ?

Méthode

Pour résoudre des équations comportant des exponentielles, on peut procéder comme suit :

- on détermine les contraintes sur l'inconnue ;
- on se ramène à une ou plusieurs égalités de la forme : $e^a = e^b$;
- on résout l'équation $a = b$;
- on conclut.

Exercice

Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) : $e^{2x-1} = 6$

Solution commentée

L'ensemble de validité de l'équation (E) est $\mathbb{R}$.

$e^{2x-1} = 6 \Leftrightarrow e^{2x-1} = e^{\ln 6}$.

(*On se ramène à une égalité du type $e^a = e^b$.*)

$2x - 1 = \ln 6 \Leftrightarrow 2x = 1 + \ln 6$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 + \ln 6}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = \{\frac{1 + \ln 6}{2}\}$

Exercice non corrigé

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-1} = 3$.

QUESTION 3

Comment résoudre une inéquation comportant des exponentielles ?

Méthode

Pour résoudre des inéquations comportant des exponentielles, on peut procéder comme suit :

- on détermine les contraintes sur l'inconnue ;
- on se ramène à une ou plusieurs inégalités de la forme : $e^a < e^b$;
- on résout l'inéquation $a < b$;
- on conclut.

Exercice

Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation (I) : $e^{-3x-1} > 3$.

Solution commentée

L'ensemble de validité de l'équation (I) est $\mathbb{R}$.

$e^{-3x-1} > 3 \Leftrightarrow e^{-3x-1} > e^{\ln 3}$

$-3x - 1 > \ln 3$ (*On se ramène à une inégalité du type $e^a > e^b$.*)

$-3x > 1 + \ln 3$

$\Leftrightarrow 3x < -1 - \ln 3$

$\Leftrightarrow x < \dfrac{-1 - \ln 3}{3}$

$S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty ; \dfrac{-1 - \ln 3}{3}\right[$

Exercice non corrigé

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x^2-1} > 1$.

QUESTION 4

Comment résoudre une équation du type : $ae^{2x} + be^x + c = 0$?

Méthode

Pour résoudre des équations du type $ae^{2x} + be^x + c = 0$; on pose $X = e^x$ et on résous l'équation du second degré : $aX^2 + bX + c = 0$

- on se ramène à une ou plusieurs égalités de la forme : $e^a = e^b$;
- on résout l'inéquation $a = b$;
- on conclut.

Exercice

Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) : $3e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$.

Solution commentée

L'ensemble de validité de l'équation (E) est $\mathbb{R}$.

On pose $e^x = X$ et l'équation devient :

$3X^2 - 5X + 2 = 0$

On résout l'équation du second degré

$3X^2 - 5X + 2 = 0$

$3X^2 - 5X + 2 = 0 \Leftrightarrow (3X - 2)(X - 1) = 0$,

donc : $X = \dfrac{2}{3}$ ou $X = 1$

Pour $X = \dfrac{2}{3}$, $e^x = \dfrac{2}{3}$ on a : $x = \ln \dfrac{2}{3}e$

pour $X = 1$, $e^x = 1$ on a : $x = 0$

$S_{\mathbb{R}} = \{0 ; \ln \dfrac{2}{3}\}$

Exercice non corrigé

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - 2e^x = 15$.

Exercices de fixation

Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

1 Recopie le numéro de l'affirmation suivi de V si l'affirmation est vrai ou de F si l'affirmation est fausse..

N°	Affirmations
1	La fonction exponentielle népérienne est une bijection.
2	La fonction exponentielle népérienne est la réciproque de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.
3	L'ensemble de définition de la fonction exponentielle népérienne est $\mathbb{R}$.
4	La fonction exponentielle népérienne est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
5	-20 est inférieur à 0 donc $\exp(-20)$ est inférieur à 0.
6	$\ln e^{\ln 4} = \ln 4$.
7	$e^{\ln 2} = 2\ln 2$.
8	$e^{\ln 3} = 3$.
9	$y = \ln 4 \Leftrightarrow e^{y} = 4$.

2 Écris plus simplement les expressions suivantes.

$A = e^{\ln 3}$; $B = e^{-\ln 5}$; $C = e^{2+\ln 3}$; $D = e^{1-\ln 2}$; $E = e^{\frac{1}{2}\ln 6}$;

$F = \ln\sqrt{e^{5}}$; $G = e^{3\ln 5}$; $H = \dfrac{e^{1+\ln 2}}{e^{2+\ln 3}}$; $I = e^{\ln(x+1)} \times e^{-\ln(x-2)}$.

3 Écris sous forme d'une puissance de e les expressions suivantes :

$R = \dfrac{e^{7}}{e^{2}}$; $S = \dfrac{(e^{-7})^{4}}{e}$; $T = e^{-x} \times e^{2x}$;

$U = (e^{-2x})^{3}\,(e^{x})^{7}$; $V = \dfrac{e^{-4x}}{(e^{x})^{2}}$.

4 Écris plus simplement chacun des nombres suivants :

a) $\ln\left(e^{-\frac{2}{3}}\right)$; b) $e^{\ln 3 - 1}$; c) $e^{5\ln 3} - 3e^{\ln 7}$;

d) $e^{\ln(x^{2}+1)} + \ln\left(e^{-2x+3}\right)$.

Résoudre des équations et inéquations comportant exponentielle

5 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^{2x-3} = 1$; b) $e^{x} = 2$; c) $e^{-2x} = -2$;

d) $e^{3x+1} = e^{1-5x}$; e) $e^{4x+1} = 3$; f) $e^{2x} = e^{-x}$.

6 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$; b) $e^{x} + e^{-x} - 2 = 0$;

c) $e^{x} - 5 + \dfrac{6}{e^{x}} = 0$; d) $2e^{x}(e^{x} - 6e^{-x}) = 5e^{x}$.

7 Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

a) $e^{-3x-1} > 3$; b) $e^{x-6} > 1$;
c) $e^{2x+2} - e^{3x-5} < 0$; d) $e^{3x-2} < e$.

8 Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

a) $e^{2x} - 3e^{x} + 2 \geq 0$; b) $e^{2x} + 3e^{x} + 4 < 0$;

c) $e^{2x} - 9 \geq 0$; d) $e^{2x} + e^{x} - 6 \leq 0$.

9 Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} e^{x} + e^{y} = 5 \\ e^{x} - e^{y} = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} e^{x} + 2e^{y} = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} xy = -15 \\ e^{x}e^{y} = e^{-2} \end{cases}$.

Calculer les limites d'une fonction comportant exponentielle

10 Calcule les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{2} + e^{x})$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - 4e^{x})$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x} - 2}{e^{3x} + 1}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{2} - x + 1)e^{-x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5 - e^{-x}}{1 + 2e^{x}}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x} - 1}{x}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{x}}{e^{x} - 1}$.

Calculer les dérivées d'une fonction comportant exponentielle

11 Calcule la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (2x + 1)\,e^{-x}$; b) $g(x) = \dfrac{e^{2x} - 2}{1 - e^{2x}}$; c) $h(x) = \dfrac{x}{1 + xe^{x}}$

Calculer les primitives d'une fonction comportant exponentielle

12 Calcule une primitive des fonctions suivantes définis par :

a) $f(x) = 2xe^{3x^{2}+1}$ sur $\mathbb{R}$. **b)** $g(x) = \dfrac{1 - e^{-2x}}{2x + e^{-2x}}$ sur $]0;+\infty[$.

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{x}(e^{x} - 1)}{e^{x} + 3}$

a) Détermine a et b tels que pour tout nombre réel x,

$f(x) = ae^{x} + \dfrac{be^{x}}{e^{x} + 3}$

b) Calcule la primitive de f qui s'annule en 0.

Exercices de Renforcement / Approfondissement

14 Soit le polynôme $P(x) = x^4 + 7x^3 - 7x^2 - 43x + 42$

1. Vérifie que 1 et −3 sont des racines de P(x)
2. a) Factorise $P(x)$.
   b) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$.
3. Déduis-en la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $e^{4x} + 7e^{3x} - 7e^{2x} - 43e^x + 42 = 0$.

15 Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{1-e^x}, \text{pour } x \neq 0. \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Démontre que la fonction f est continue en 0.
b) Étudie la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

16 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $3^x = 1$; 2) $2^{x+1} = 8$; 3) $2^x = 3^{x+1}$; 4) $3^{2x} = 2^{3x}$;

5) $3 + \dfrac{2}{3^{-x}} = 9^x$; 6) $(x+3)^x = 1$; 7) $4^{3+x} \geq 3^{5x}$;

8) $2^x < 2^{-x}$; 9) $2 \times 10^{2x+3} \times 10^x - 5 = 0$;

10) $2^{2x+3} - 3 \times 2^{x+1} + 1 = 0$;

17 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \pi^x$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 10^{-2x}$; c) $\lim\limits_{x \to -\infty} 5^{x^2}$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3^{\frac{1}{x}}$; e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^x}{5^x}$.

18 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie ci-dessous :

1) $f : x \mapsto 5^x + 2x$; 2) $f : x \mapsto \left(\sqrt{5}\right)^x$;

3) $f : x \mapsto \dfrac{1}{3^x}$; 4) $f : x \mapsto -\dfrac{3^x}{2^{x-1}}$.

19 Étudie et représenter graphiquement la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x}{3^x}$.

20 Calcule les dérivées des fonctions numériques f définies par :

1) $f(x) = x\sqrt{x}$; 2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; 3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

4) $f(x) = \sqrt[3]{1+\sin x}$; 5) $f(x) = \sqrt[4]{1-x^2}$.

21 Dans chacun des cas suivants, écris $f(x)$ sous la forme x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) et détermine la dérivée de f.

1) $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$; 2) $f : x \mapsto x^e\sqrt{x}$;

3) $f : x \mapsto \dfrac{x^{0,5}}{\sqrt[4]{x^3}}$; 4) $f : x \mapsto \dfrac{x^{-\ln 3}}{x^{1-e}}$.

22 Trouve les primitives des fonctions numériques f définies par :

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^5}$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$; 3) $f(x) = x\sqrt{\left(x^2-1\right)^5}$

4) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{\left(x^3-1\right)^3}}$; 5) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

23 Calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - x^2\right)$; 3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln x - x^2\right)$;

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x}{x}$; 5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{\ln x}$; 6) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)^2 e^x$;

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\ln x)^3$; 8) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 e^x$; 9) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3+1}$.

24 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J)

1. Détermine l'ensemble de définition de f et calculer les limites aux bornes de D_f.
2. Démontre que la courbe (Γ) d'équation $y = 1 + e^x$ est une asymptote à (C_f) en $+\infty$. Précise la position relative de (Γ) et (C_f).
3. Étudie les variations de f et tracer (Γ) et (C_f).

25 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J) d'unité 4cm.

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - x^2e^x$.

1. Calcule : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
2. Détermine $g'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et montrer que : $g'(x) = -x(2+x)e^x$.
3. Détermine le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation.
4. Démontre que $\forall x \in]0;+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que : $0,70 < \alpha < 0,71$.
5. Déduis-en que : $\forall x \in]-\infty;\alpha[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x}{1+xe^x}$.
On désigne par (C_f) sa représentation graphique.

1. On considère la fonction h définie par : $h(x) = 1 + xe^x$.

Étudie les variations de h et montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ interpréter graphiquement le dernier résultat.
3. a) On suppose que f est dérivable et on note f' sa dérivée. Démontre que $\forall\, x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\left(1+xe^x\right)^2}$.

   b) Déduire-en le signe de f', puis dresser le tableau de variation de f.
4. Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.
5. Prouve que : $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{\alpha+1}$ et encadre $f(\alpha)$ par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.
6. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J), trace (C_f).

Partie C

Soit k la restriction de f à $[\alpha\,;+\infty[$.

1. a) Justifie que k est une bijection.

   b) Dresse le tableau de variation de la fonction réciproque k^{-1}.
2. a) Prouve que k^{-1} n'est pas dérivable en : $\dfrac{\alpha^2}{\alpha+1}$.

   b) Calcule $k(1)$et prouve que k^{-1} est dérivable en $\dfrac{1}{1+e}$.

   c) Trace $(C_{k^{-1}})$.

26 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). L'unité graphique est 2 cm.

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$f(x) = (2x+4)e^{\frac{x}{2}} - x$.

On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f.

Partie A Étude d'une fonction auxiliaire

Soit h la fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = x + e^{\frac{x}{2}}$.

1. Étudie le sens de variation de h.
2. Calcule les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α tel que : $-0{,}71 < \alpha < -0{,}70$.
4. Déduis-en que : $\forall\, x \in\,]-\infty;\alpha[$, $h(x) < 0$; $\forall\, x \in\,]\alpha;+\infty[$, $h(x) > 0$.

Partie B Étude de la fonction f

Pour tout nombre réel x, $f(x) = (2x+4)e^{\frac{x}{2}} - x$.

1. a) Démontre que $f(\alpha) = -2 - \alpha - \dfrac{4}{\alpha}$.

   b) Déduis-en un encadrement de $f(\alpha)$d'amplitude 0,1.
2. a) Pour tout réel x calcule $f'(x)$ et démontre que $f'(x) = -h'(x)e^{\frac{x}{2}}$.

   b) Déduis-en les variations de f.
3. a) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interprète graphiquement ces résultats.

   b) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   c) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est une asymptote à (C_f) en $+\infty$.
4. a) Dresse le tableau de variation de f.

   b) Construis la droite (Δ) et la courbe (C_f) dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

27 ***Partie A***

Le plan est muni d'un repère orthonormé(O,I,J). L'unité graphique est 2 cm.

On considère la fonction numérique f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)e^{2x} - 4(x-1)e^x - 2$.

On note (C) la courbe représentative de la fonction f.

1. a) Calcule la limite de f en $-\infty$ puis interprète graphiquement le résultat.

   b) Démontre que pour tout réel non nul
   $f(x) = xe^{2x}\left(1 - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{4}{e^x} + \dfrac{4}{xe^x} - \dfrac{2}{xe^{2x}}\right)$.

   c) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement ces résultats.
2. a) Démontre que : $f'(x) = 2xe^x\left(e^x - 1\right)$.

   b) Dresse le tableau de variation de f.
3. a) Démontre que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est α.

   b) Démontre que : $-1{,}7 < \alpha < -1{,}6$.
4. a) Trace avec soin la courbe (C). On prendra $\ln 2 \approx 0{,}7$.

   b) Utilise (C) pour donner, suivant les valeurs du réel k, le nombre de solution de l'équation : $(E_k) : x \in \mathbb{R}$; $f(x) = k$.
5. Soit la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $H(x) = \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\right)e^{2x} + 4(2-x)e^x$.

a) Justifie que la fonction H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \longmapsto f(x) + 2$.

b) Déduis-en sur $\mathbb{R}$, la primitive F de la fonction f, qui prend la valeur −1 en 0.

Partie B

Soit g la fonction numérique définie par :

$g(x) = (x^2 - 4x)\ln x - \dfrac{1}{2}(x^2 - 8x + 4)$ si $x > 0$ et $g(0) = 0$.

On note (Cg) sa courbe représentative dans un nouveau repère orthonormé d'unité 2 cm.

1. a) Détermine l'ensemble de définition de la fonction g.

   b) Justifie que pour tout réel x strictement positif, $g(x) = f(\ln x)$.

2. a) Étudie la continuité de g à droite en 0.

   b) Étudie la dérivabilité de g à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat.

   c) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$.

3. Étudie le sens de variation de g, puis dressé son tableau de variation.

4. a) Déduis de la partie A-3.a), un encadrement de l'abscisse du point d'intersection de (Cg) avec l'axe des abscisses.

   b) Trace avec soin la courbe (Cg) et la tangente en son point d'abscisse 0.

28 Soit la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2^{x+1} - 4^x$ de courbe représentative (C) dans un repère orthonormé (unité 2 cm).

Partie A

1. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ interpréte graphiquement le dernier résultat.

2. a) Justifie que $f(x)$ peut s'écrire : $e^{x\ln 2}(2 - e^{x\ln 2})$.

   b) Calcule $f'(x)$ et démontre que f' est du signe de $(1 - e^{x\ln 2})$.

   c) Dresse le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. Représente graphiquement (C). (On fera figurer les points d'abscisses −1, 0, 1, 2).

Partie B

Avec la précision permise par le graphique, résous :

(E_1) : $f(x) = \dfrac{3}{4}$ et (E_2) : $f(x) = -2$.

4. On se propose de trouver les solutions exactes des équations (E_1) et (E_2).

   En posant $X = 2^x$, montre que :

   (E_1) Équivaut à $4X^2 - 8X + 3 = 0$

   (E_2) Équivaut à $X^2 - 2X - 2 = 0$

   Calcule les solutions exactes de (E_1) et de (E_2).

29 Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée. Écris en dessous du tableau le numéro de l'affirmation suivi de VRAI lorsque l'affirmation est vraie ou de FAUX lorsque l'affirmation est fausse.

f est la fonction définie par : $f(x) = e^{\tan 2x}$.

N°	Affirmations
1	$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -4e^{\sqrt{3}}$
2	$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 8e^{\sqrt{3}}$
3	$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$
4	f est dérivable en $\dfrac{\pi}{4}$

30 Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} e^x - 2e^y = 1 \\ e^x + e^y = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} e^x + 3e^y = 1 \\ e^x - 5e^y = 7 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 5e^x - 3e^y = 7 \\ 7e^x + 6e^y = 11 \end{cases}$; d) $\begin{cases} e^x \times e^{2y-1} = 7 \\ e^{x+2} + e^{-y} = 11 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} e^x \times 2e^y = 5 \\ e^x + e^y = 6 \end{cases}$.

31 On considère le polynôme P, tel que :

$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$.

1. a) Calcule P(1).

   b) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$.

2. Déduis les solutions dans $\mathbb{R}$ de :

   a) (E) : $2e^{3x} - 5e^{2x} + e^x + 2 = 0$.

   b) (I) : $2e^{3x} - 5e^{2x} + e^x + 2 \leq 0$.

32 Pour chaque ligne du tableau ci-dessous quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule est juste. Écris en dessous du tableau le numéro de la ligne suivi de la lettre correspondant à la réponse juste.

N°	Énoncés	Réponses	
1	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\ln 0,5} =$	A	$-\infty$
		B	0
		C	$+\infty$
		D	n'existe pas
2	La fonction : $x \mapsto (\ln x)^x$ est :	A	définie sur $\mathbb{R}$
		B	strictement croissante sur $]0\,;1[$
		C	strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$
		D	dérivable en 0
3	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ si $f(x) =$	A	$x\ln\left\lvert\dfrac{x+1}{x}\right\rvert$
		B	$(x+3)e^{\frac{1}{x}} - x$
		C	$\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{\cos x}$
		D	e^{1-x}
4	Une solution de l'équation : $2e^{2x} - 5e^{x} - 3 = 0$ est :	A	ln 5
		B	ln 3
		C	0
		D	1

33 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Étudie et représente graphiquement la fonction f, dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par : $f(x) = e^{-\ln x}$.

34 Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3\left(1 - \dfrac{1}{e^x + 1}\right)$.

1. Vérifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3e^x}{e^x + 1}$.
2. Déduis-en la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f qui s'annule en 0.

35 Résous dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $5^x - 5^{-x} = 6$;

b) $4^x + 6^x = 9^x$.

36 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Dans chacun des cas suivants, étudie et représente graphiquement la fonction f.

1. $f(x) = x^{0,75}$; **2.** $f(x) = (0,5)^x$; **3.** $f(x) = 2^x - 2$.

37 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{e^x - 3}{e^x - 1}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. a) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et donne une interprétation graphique de chacun de ces résultats.
   b) Calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$, puis $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ et donne une interprétation graphique de ces résultats.
3. a) Calcule la fonction dérivée f' de f, puis étudie le sens de variation de f.
   b) Dresse le tableau de variation de f.
4. Trace (C) dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique 1 cm.

38 ***Partie A***

On donne la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par :
$P(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$.

1. Résous l'équation ; $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$.
2. Démontre que :
   $\forall x \in \left]-\infty\,;-\ln 2\right[\cup \left]\ln 2\,;+\infty\right[,\ P(x) > 0$ et
   $\forall x \in \left]-\ln 2\,;\ln 2\right[,\ P(x) < 0$.

Partie B

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{e^x - 1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Unité graphique : 1 cm.

1. Détermine l'ensemble de définition Df de la fonction f.
2. a) Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b) Calcule les limites à gauche et à droite en 0 de la fonction f puis donne une interprétation graphique de ces résultats.
3. On admet que f est dérivable en tout point de son ensemble de définition et on note f' sa fonction dérivée.
   a) Vérifie que : $\forall x \in Df$, $f'(x) = \dfrac{P(x)}{(e^x - 1)^2}$.
   b) Étudie le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
   c) Dresse le tableau de variations de f.
4. a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

b) Étudie la position relative de (C) et (D) sur $]0\,;+\infty[$.

5. a) Démontre que la droite (D') d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$.
   b) Étudie la position de (C) par rapport à (D') sur $]-\infty\,;0[$.
6. Construis (D), (D') et (C), dans le même repère (O, I, J).
7. a) Détermine deux nombres réels a et b, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^*, f(x) = ax + \dfrac{be^x}{e^x - 1}$.
   b) Déduis-en les primitives sur $]-\infty\,;0[$ de la fonction f.
   c) Détermine sur $]-\infty\,;0[$, la primitive F de la fonction f qui prend la valeur 1 en -1.

39 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2e^{-x}$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1. Calcule la dérivée de f.
2. Déduis-en le tableau de variation de f.
   Précise les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Trace (C). On choisira 4 cm comme unité graphique.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -\dfrac{2}{e}e^{\frac{x}{2}}$.

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $I = [-1\,;0]$.

4. Démontre que $f(\alpha) = f(2)$ équivaut à $g(\alpha) = \alpha$.
5. a) Démontre que $g(I)$ est inclus dans I.
   b) Démontre que pour tout x appartenant à I, $|g'(x)| \le \frac{1}{e}$.
   c) Déduis-en que pour tout x appartenant à I, $|g(x) - \alpha| \le \frac{1}{e}|x - \alpha|$.
6. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = -\dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$.

On admet que (u_n) appartient à I pour tout nombre entier naturel n.

a) Démontre que pour tout nombre entier naturel n, $|u_n - \alpha| \le \dfrac{1}{e^n}|u_0 - \alpha|$.

b) Déduis-en que pour tout nombre entier naturel n, $|u_n - \alpha| \le \dfrac{1}{2e^n}$.

c) Déduis-en le plus petit nombre entier naturel, tel que l'inégalité précédente fournisse une valeur approché de α à 10^{-6} près.

Situations complexes

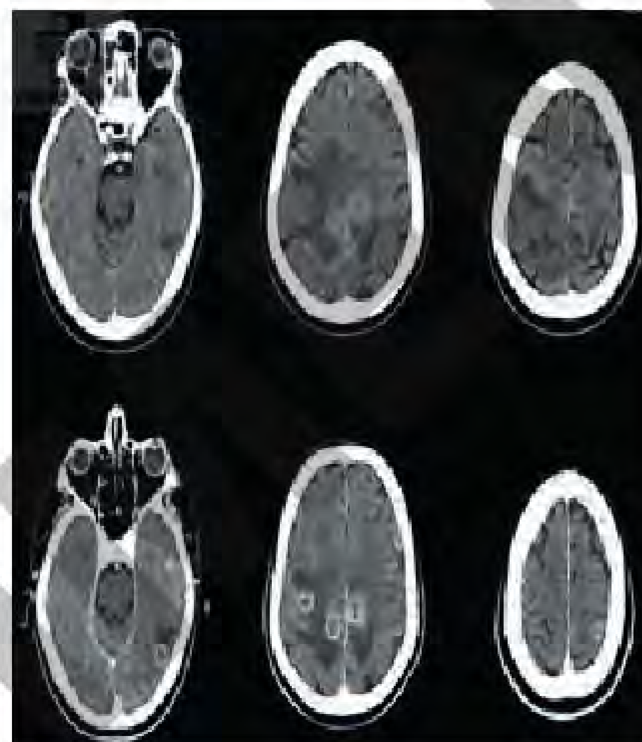
40 En 2010, un styliste a décidé d'ouvrir des boutiques de vêtements à prix modérés, tout d'abord dans son pays d'origine, puis dans la communauté européenne et enfin au niveau mondial.
Il a utilisé la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;20]$ par : $f(x) = 5 + xe^{0{,}2x-1}$ pour modéliser son développement. On désigne par $f(x)$ le nombre de magasins de sa marque existant en l'an $2010 + x$. Chaque magasin a un chiffre d'affaires journalier moyen de 164 000 F CFA et un magasin est ouvert 300 jours par an.
En vue de faire une prévision, le styliste souhaite obtenir un chiffre d'affaires annuel moyen supérieur ou égal à 3 936 000000 pour l'ensemble de ses magasins mais ne sait pas l'année à partir de laquelle cet objectif sera atteint.
Il te sollicite.
En utilisant tes connaissances sur la fonction exponentielle, indique au stylistique l'année à partir de laquelle il atteindra son objectif.
(*Remarque : on privilégiera une approche graphique de la solution du problème*).

41 Un crime vient d'être commis dans un hôtel. Un client a été assassiné dans une chambre de l'hôtel par un inconnu.
L'inspecteur de police chargé de l'enquête et un médecin légiste arrivent ce mercredi 01 avril 2020 à 10 heures sur le lieu de l'assassinat et veulent déterminer l'heure du crime.
Pour cela, l'inspecteur de police prend la température de la chambre et trouve 20°C et demande aussitôt au médecin légiste de prendre la température du corps. Celui-ci trouve 32°C. Une demi-heure plus tard, il demande au médecin légiste de prendre à nouveau la température du défunt. Celui-ci trouve 31°C. Avec ces données, l'inspecteur de police demande au médecin légiste de déterminer l'heure du crime. Ce dernier hésite et demande un temps de réflexion.
Ayant assisté à cette enquête, tu décides de contribuer à la détermination de l'heure du crime.
Tu sais que :

- la loi de NEWTON sur le refroidissement d'un objet en milieu ambiant permet de modéliser la température de la victime en fonction du temps t $(t \ge 0)$ par :
  $f(t) = Ae^{-kt} + 20$, où A et k sont des constantes positives que tu détermineras.
- la température de la victime au moment de son décès à l'instant $t = 0$, était de 37° C.

Détermine l'heure du crime en basant ton argumentation sur tes connaissances mathématiques.

8 NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE DU PLAN



Commentaire de la Leçon

Les nombres complexes sont nés de confrontations avec des opérations impossibles comme les racines carrées de nombres négatifs. Un des premiers mathématiciens à en imaginer l'existence est Cardan en 1545 à l'occasion de la résolution de l'équation $x(10-x)=40$ dont il donne les solutions sous la forme suivante : $5+\sqrt{-15}$ et $5-\sqrt{-15}$.

Les nombres complexes associés aux transformations du plan n'ont pas été étudiés en classe de première. En classe de terminale, cette leçon vise à établir l'écriture complexe des transformations du plan et à résoudre des problèmes de géométrie en utilisant un outil analytique.

Il ne s'agit cependant pas de faire la théorie sur les transformations du plan et leurs écritures complexes mais plutôt d'utiliser ces écritures ; il serait donc bon de les faire retrouver par les apprenants.

Dans la résolution d'un problème, l'élève sera entrainé à utiliser l'outil complexe, l'expression analytique ou l'outil géométrique selon les nécessités.

Dans les contrôles continus, l'enseignant pourra préciser l'outil qu'il souhaite privilégier.

Les nombres complexes et la géométrie du plan seront réinvestis au niveau de l'enseignement supérieur dans l'algèbre et la géométrie.

Les nombres complexes ne sont pas utilisés seulement en Mathématiques, elles trouvent leurs applications dans divers domaines de la vie courante.

En technologie pour pouvoir enregistrer des sons et des images sur les Smartphones. En médecine, les scanners IRM (Imagerie à Résonnance Magnétique Nucléaire) permettent de voir à l'intérieur du corps grâce aux nombres complexes.

Habiletés et Contenus

- **Connaître** la définition d'une similitude directe ; les éléments caractéristiques d'une similitude directe ; les formules relatives à l'écriture complexe : (d'une translation , d'une symétrie centrale , de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses , de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées , d'une homothétie de centre Ω et de rapport λ , d'une rotation de centre Ω et d'angle θ , d'une similitude directe) ; les caractérisations complexes : (des points alignés , des triangles particuliers , des points cocycliques , d'un cercle , d'une droite).
- **Reconnaître** l'écriture complexe d'une :(translation , symétrie centrale , symétrie orthogonale par rapport à l'un des axes de coordonnées , homothétie , rotation , similitude directe).
- **Déterminer** l'écriture complexe d'une : (translation , symétrie centrale , symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses , symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées , homothétie de centre Ω et de rapport k , rotation de centre Ω et d'angle θ , similitude directe) ; l'image : (d'un point, d'un segment, d'une droite, d'un cercle, d'un angle, par une transformation dont on connait l'écriture complexe) ; les éléments caractéristiques, connaissant son écriture complexe, d'une : (translation , symétrie centrale , symétrie orthogonale par rapport à un axe du repère , homothétie , rotation , similitude directe) ; des lieux géométriques à l'aide des nombres complexes , la nature d'un triangle, d'un quadrilatère en utilisant les caractérisations complexes .
- **Construire l'**image d'un point par une similitude directe ; des lieux géométriques
- **Démontrer** une propriété géométrique (points alignés, points cocycliques, angle droit, ...) en utilisant les caractérisations complexes
- **Traiter une situation** faisant appel aux applications géométriques des nombres complexes

Situation d'Apprentissage

Le tableau ci-contre, appelé « les sept carrés », a reçu un prix au concours d'arts d'un lycée. L'auteur, un élève de terminale de l'année précédente, affirme avoir utilisé une similitude directe pour construire ce tableau. Émerveillés, les élèves de terminale D de l'année en cours décident d'étudier les similitudes directes et de construire des figures.

Activité 1 Nombres complexes, distances et angles

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$).

1) Soit A et B deux points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$ et $z_B = 2$.

   a) Détermine l'affixe $z_{\overrightarrow{AB}}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$

   b) Calcule la distance AB.

   c) Détermine mes $\left(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}}\right)$.

2) Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que A ≠B et C ≠ D d'affixes respectives z_A; z_B; z_C et z_D.

   a) En utilisant la relation de Chasles, justifie que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right) = \left(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{CD}}\right) - \left(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}}\right)$.

   b) Déduis-en que $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}}\right) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

Récapitulons

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$) on a :

- L'affixe $z_{\overrightarrow{AB}}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
- $AB = |z_B - z_A|$.
- $\text{mes}\left(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}}\right) = \arg(z_B - z_A) + 2k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$
- $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Exercices de fixation

1 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).
Soient A et B deux points d'affixes respectives 2i + 1 et 3i +2.

1. Détermine l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Calcule AB.
3. Détermine $\text{Mes}\left(\widehat{\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}}\right)$.

2 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$).
Dans chacun des cas ci-dessous, détermine une mésure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)$.

a) $z_A = 2 - i\sqrt{3}$; $z_B = -2 - i\sqrt{3}$; $z_C = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $z_D = 1 + i\sqrt{3}$.

b) $z_A = \sqrt{3} + 2i$; $z_B = i$; $z_C = 2 + i\sqrt{3}$ et $z_D = 1 + i\sqrt{3}$

3 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives −1 + i, 2i et 2 − 2i.

Détermine la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.

Activité 2 Caractérisation complexe de points alignés

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$) .

Soit A, B et C trois points du plan tels que A ≠B et C ≠ A d'affixes respectives z_A ; z_B et z_C.

1. Justifie que : A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$
2. Déduis-en à quel ensemble appartient le rapport $\dfrac{z_C - z_D}{z_B - z_A}$

■ **Récapitulons**

Soient A, B et C trois points du plan tels que A ≠B et C ≠ A d'affixes respectives z_A ; z_B et z_C.

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_D}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$.

Exercice de fixation

4 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).

Soient A, B et C trois points d'affixes respectives a, b et c telles que : $a = 1 + i$; $b = 4 + 3i$ et $c = 7 + 5i$.

1. Calcule : $\dfrac{b-a}{c-a}$.
2. Déduis-en que les points A, B et C sont alignés.

Activité 3 Caractérisation complexe des triangles particuliers

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$) .

Soit A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respective z_A ; z_B et z_C (A ≠ B et A ≠ C).

1. ABC est un triangle isocèle en A et mes Â = a $(\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$.
   a) Détermine $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right|$.
   b) Détermine $arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$.
   c- Déduis la forme exponentielle de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
2. ABC est un triangle équilatéral.
   a) Détermine $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right|$.
   b) Détermine $arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$.
   c) Déduis la forme exponentielle de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
3. ABC est un triangle rectangle en A.
   a) Justifie que :
   $$(AB) \perp (AC) \Leftrightarrow arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$$
   b- Déduis à quel ensemble appartient le rapport $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
4. Déduis des consignes 1 et 3 que :

ABC est un triangle rectangle et isocèle en A équivaut à $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$ ou $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$.

■ **Récapitulons**

- ABC est un triangle isocèle en A et mes Â = a $(\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$ si et seulement si
  $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$
- ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
- ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $\dfrac{z_C - z_D}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.
- ABC est un triangle rectangle et isocèle en A si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$

Exercices de fixation

5 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$).

Soient A, B et C trois points d'affixes respectives $-1+i$, $2i$ et $2-2i$.

1. Détermine une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.
2. Déduis-en la nature du triangle ABC.

6 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$).

Soient A, B et C trois points d'affixes respectives a, b et c telles que : $a=1$; $b=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $c=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calcule $\frac{b-a}{c-a}$.
2. Déduis-en la nature du triangle ABC.

Activité 4 Caractérisation complexe de l'angle droit

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$).

Soient A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives z_A ; z_B et z_C (A ≠ B et A ≠ C).

1. Justifie que : $(AB)\perp(CD) \Leftrightarrow arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$
2. Déduis-en à quel ensemble appartient le rapport $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

■ **Récapitulons**

Soit A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives z_A ; z_B ; z_C et z_D (A≠Bet C≠D).

La droite (AB) est perpendiculaire à la droite (CD) si et seulement si $\frac{z_C-z_D}{z_B-z_A}\in i\mathbb{R}^*$.

Exercice de fixation

7 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).
Soient A, B et C trois points d'affixes respectives a, b et c, telles que :
$a=3-i$, $b=2i$ et $c=2-2i$.

1. Calcule : $\frac{c-a}{b-a}$.
2. Justifie que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Activité 5 Caractérisation complexe de points cocycliques

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$).

Soit A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives a,b,c et d.

On rappelle que les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si A, B et C sont non alignés et

mes $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}}\right)=$ mes$\left(\widehat{\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DB}}\right)+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

1. Justifie que :

mes $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}}\right)=$ mes$\left(\widehat{\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DB}}\right)+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow$

$\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)-\arg\left(\frac{b-d}{a-d}\right)=k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

2. Justifie que : $arg\left(\frac{b-c}{a-c}:\frac{b-d}{a-d}\right)=k\pi,\,(k\in\mathbb{Z})$
3. Déduis à quel ensemble appartient le quotient $\frac{b-c}{a-c}:\frac{b-d}{c-d}$.

Récapitulons

Soit A, B, C et D quatre points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives a, b, c et d tels que trois soient non alignés.

Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $\frac{b-c}{a-c} : \frac{b-d}{c-d}$ est un nombre réel non nul.

Exercices de fixation

8 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).

Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan d'affixes respectives $a = \sqrt{3}$; $b = -\sqrt{3}$; $c = i\sqrt{3}$ et $d = -i\sqrt{3}$.

Calcule $\frac{c-a}{c-b}$ et $\frac{d-a}{d-b}$ puis justifie que les points A, B, C et D sont cocycliques.

9 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).

Soit A, B, C et D quatre points d'affixes respectives a, b, c et d, telles que :

$a = 2i$; $b = 2 - 2i$; $c = 3 - i$ et $d = 2 + 2i$.

En utilisant les arguments de $\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$, justifie que les points A, B, C et D sont cocycliques.

Activité 6 Écriture complexe des symétries

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u},\vec{v})$.

- **Symétries par rapport aux axes du repère**

M, M' et M_1 sont trois points d'affixes respectives z, z' et z_1. On pose : $z = a + ib$.

1. M' est l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe de repère $(O ; \vec{u})$.
   a) Place le point M dans le repère orthonormé direct $(O ; \vec{u},\vec{v})$
   b) Construis le point M' dans le repère orthonormé direct $(O ; \vec{u},\vec{v})$
   c) Exprime z' en fonction de $\overline{z}$
2. M_1 est l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe de repère $(O ; \vec{v})$.
   a) Construis le point M_1 dans le repère orthonormé direct $(O ; \vec{u},\vec{v})$
   b) Exprime z_1 en fonction de $\overline{z}$

- **Symétrie par rapport à un point**

M, M_2, M_3 et Ω sont quatre points d'affixes respectives z, z_2, z_3 et ω. On pose : $z = a + ib$.

1. M_2 est l'image de M par la symétrie centrale de centre O.
   a) Construis le point M_2 dans le repère orthonormé direct $(O ; \vec{u},\vec{v})$
   b) Exprime z_2 en fonction de $\overline{z}$
2. M_3 est l'image de M par la symétrie centrale de centre Ω.
   a) Place le point Ω dans le repère orthonormé direct $(O ; \vec{u},\vec{v})$.
   b) Construis le point M_3 dans le repère orthonormé direct $(O ; \vec{u},\vec{v})$
   c) Exprime z_3 en fonction de z et ω.

Récapitulons

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.
M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z'

- L'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe de repère $(O\,;\,\vec{u})$ est : $z' = \overline{z}$
- L'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe de repère $(O\,;\,\vec{v})$ est : $z' = -\overline{z}$.
- L'écriture complexe de la symétrie centrale de centre O est $z' = -z$
- L'écriture complexe de la symétrie centrale de centre le point Ω d'affixe ω est : $z' = -z + 2\omega$.

Exercices de fixation

10 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
M et M' sont des points d'affixes respectives z et z'.
Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

Affirmations

1. l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (OI) est : $z' = -\overline{z}$;
2. l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (OJ) est : $z' = \overline{z}$;
3. l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (OJ) est : $z' = -\overline{z}$;
4. l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (OJ) est : $z' = -z$;
5. l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre O est : $z' = -z$.

11 Écris la lettre correspondant à la bonne réponse.

L'écriture complexe de la symétrie centrale de centre Ω(2 - i) est :	a) $z' = z + 2 - i$
	b) $z' = -z - 4 + 2i$
	c) $z' = -z + 4 - 2i$

12 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.
Détermine l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre Ω d'affixe $1 + i$.

13 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\,\vec{u},\vec{v})$.
M et M' sont des points d'affixes respectives z et z'.
Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', tel que
$z' = -z + 3 - 2i$.
Justifie que f est une symétrie centrale et précise son centre.

Activité 7 Écriture complexe d'une translation

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.
Soit $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par la translation du vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.

1. 1. Détermine l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$
2. 2. Déduis de la relation $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ l'expression de z' en fonction de z.
3. Réciproquement, si $z' = z + b$, justifie que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Récapitulons

M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z'.

L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle d'une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b si et seulement si : $z' = z + b$

Exercices de fixation

14 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).
Détermine l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{w}(-1\ ;\ -2)$.

15 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).
Soit g la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', tel que :

$z' = z - \dfrac{1}{2} + i.$

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.

Activité 8 Écriture complexe d'une rotation

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$) .

Soit M'(z') l'image de M(z) par la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle orienté θ ($\theta \in \mathbb{R}$) .

1. Calcule les distances : ΩM et ΩM'.
2. Exprime $arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right)$ en fonction de θ.
3. Justifie que : $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$.
4. Déduis que $z' = e^{i\theta}z + \left(1 - e^{i\theta}\right)\omega$.
5. Déduis-en l'écriture complexe de la rotation de centre le point O et d'angle orienté θ.

Récapitulons

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$) .

M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z'.

- L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle d'une rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle orienté θ ($\theta \in \mathbb{R}$) si et seulement si : $z' = e^{i\theta}z + \left(1 - e^{i\theta}\right)\omega$.
- L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle d'une rotation de centre O et d'angle orienté θ ($\theta \in \mathbb{R}$) si et seulement si : $z' = e^{i\theta}z$.

Exercices de fixation

16 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).
Détermine l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle orienté de mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

17 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).
M et M' sont des points d'affixes respectives z et z'.
Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', tel que :

$z' = (\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2})z + 3i$.

Justifie que f est une rotation et précise son centre et son angle.

Activité 9 Écriture complexe d'une homothétie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$).

Soit $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport $k\left(k \in \mathbb{R}^*\right)$.

1. Détermine l'affixe de chacun des vecteurs suivants : $\overrightarrow{\Omega M'}$ et $k\overrightarrow{\Omega M}$.
2. Justifie que : $z' - \omega = k(z - \omega)$
3. Déduis-en l'expression de z' en fonction de z.

Récapitulons

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$).

M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z'.

- L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle d'une homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k $\left(k \in \mathbb{R}^*\right)$ si et seulement si : $z' = kz + (1-k)\omega$.
- L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle d'une homothétie de centre O et de rapport k $\left(k \in \mathbb{R}^*\right)$ si et seulement si : $z' = kz$.

Exercice de fixation

18 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).

Détermine l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport $-\dfrac{2}{3}$.

19 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).

M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z'.

Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', tel que :

$z' = 7z + 3 - i$.

Justifie que f est une homothétie et précise son centre et son rapport.

Activité 10 Similitude directe (Définitions et propriétés)

Soit Ω un point du plan et k un nombre réel strictement positif. On désigne par h l'homothétie de centre Ω et de rapport k et par r la rotation de centre Ω et d'angle orienté θ.

Pour tout point M du plan distinct de Ω, on pose : $r(M) = M_1$ et $h(M_1) = M'$.

1. Justifie que : $h o r(\Omega) = \Omega$ et $r o h(\Omega) = \Omega$
2. a) Justifie que : $h o r(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \Rightarrow \Omega M' = k\Omega M$.

   b) Justifie que : $h o r(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \Rightarrow$ mes $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \theta$.
3. Pour tout point N du plan distinct de Ω, on pose : $r(N) = N_1$ et $h(N_1) = N'$

   a) Justife que : $M'N' = kMN$.   b) Justifie que : $\left(\widehat{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}}\right) = \theta$.

Récapitulons

On appelle similitude directe S de centre Ω, de rapport k et d'angle orienté θ, toute transformation du plan telle que : $S = h(\Omega,k)\circ r(\Omega,\theta)$.

Pour tout point M du plan distinct de Ω $S(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \theta \end{cases}$

Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par S, on a :

$M'N' = kMN$ et mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}}\right) = \theta$.

Exercices de fixation

20 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\vec{v})$.

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes, puis justifie tes réponses :

1. La symétrie centrale de centre O est une similitude directe .
2. Toute translation est une similitude directe.

21 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$) d'unité graphique 1 cm.
Soit A, B et C trois points du plan tels que AB = 5 et S la similitude directe de centre A de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$ qui transforme B en C.

Détermine : AC et Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$.

22 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$).
Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmation
1	Toute similitude directe de rapport $\frac{1}{5}$ est une homothétie.
2	Toute similitude directe de rapport 3 est la composée d'une homothétie de rapport 3 et d'une rotation d'angle non nul.
3	Toute homothétie de rapport -2 est une similitude directe de rapport 2.
4	Toute translation et toute rotation sont des similitudes directes.

Activité 11 : Écriture complexe d'une similitude directe

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$) .

On désigne par Ω le point d'affixe ω. Soit r la rotation de centre Ω et d'angle orienté θ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport k ($k \in \mathbb{R}_+^*$).

1. a) Donne l'écriture complexe de r.
   b) Donne l'écriture complexe de h.
2. a) Justifie que l'écriture complexe de $h \circ r$ est : $z \mapsto ke^{i\theta}(z-\omega)+\omega$
   b) Déduis que l'écriture complexe de $h \circ r$ est sous la forme : $z' = az + b$ où a et b sont des nombres complexes à déterminer.

Récapitulons

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.

M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z'.

- L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle d'une similitude directe de centre Ω d'affixe ω et de rapport $k\ \left(k\in\mathbb{R}_+^*\right)$ d'angle orienté θ si et seulement si : $z' = ke^{i\theta}(z-\omega)+\omega$.
- L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle d'une similitude directe de centre O et de rapport $k\ \left(k\in\mathbb{R}_+^*\right)$ d'angle orienté θ si et seulement si : $z' = ke^{i\theta}z$.
- On admet que :
  L'écriture complexe d'une similitude directe S qui n'est pas une translation est sous la forme : $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
  - Le centre de S est le point Ω d'affixe ω tel que : $\omega=\dfrac{b}{1-a}$
  - Le rapport de S est k tel que : $k=|a|$
  - L'angle de S est θ tel que : $\theta = Arg(a)$.

Exercices de fixation

23 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.
Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre A d'affixe $1 - i$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

24 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.
Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe d'écriture complexe :
$z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(2 - i)$

Activité 12 Images de figures simples par une similitude directe

I) Soit S une similitude directe de rapport k distinct d'une translation. On peut écrire que : S = $h\circ r$ où h est une homothétie et r une rotation.

En utilisant cette décomposition de S, justifie que :

- L'image d'une droite par la similitudes S est une droite ;
- L'image d'un cercle de rayon r par la similitudes S est un cercle de rayon $k\,r$;
- L'image d'un segment [AB] par la similitudes S est un segment [A'B'] tel que : A'B' = k AB.

II) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé directe $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.

Soit S la similitude directe d'écriture complexe $z' = (1 + i)z + i$ et (D) la droite d'équation : $x + y - 1 = 0$.
Détermine une équation de la droite (D'), image de la droite (D) par S.

Récapitulons

- L'image d'une droite par une similitude directe est une droite.
- L'image d'un cercle par une similitude directe est un cercle.
- Toute similitude directe de rapport k multiplie les distances par k.
- L'expression analytique d'une similitude directe (expression de x' et y' en fonction respectivement de x et y) permet de déterminer l'image de certaines figures simples.

Exercices de fixation

25 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$. Soit S la similitude directe d'écriture complexe : $z' = -2iz$.
Soit *(D)* la droite d'équation $x - y = 0$.
Détermine une équation de *(D')*, image de *(D)* par S.

26 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$. Soit S la similitude directe d'écriture complexe : $z'=2\left(1+i\sqrt{3}\right)z+3$
Soit *(C)* le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{5}{4}$
Détermine une équation de *(C')*, image de *(C)* par S.

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$)

I. NOMBRES COMPLEXES ET CONFIGURATIONS DU PLAN

1. Nombres complexes, distances et angles

Propriété 1

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B.

On note $z_{\overrightarrow{AB}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On a :

- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$;
- $AB = |z_B - z_A|$;
- *si* A ≠ B, mes$(\widehat{\vec{u}\ ;\overrightarrow{AB}}) = arg(z_B - z_A) + 2k\pi,\ k \in Z$ où mes$(\widehat{\vec{u}\ ;\overrightarrow{AB}})$ désigne une mesure quelconque de l'angle $(\widehat{\vec{u}\ ;\overrightarrow{AB}})$.

Exemple d'application de la propriété

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$), on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que :
$a = \sqrt{3} + i$; $b = -\sqrt{3} + i$ et $c = -2i$.

- Les points A et B sont distincts.
- L'affixe $z_{\overrightarrow{AB}}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$; $z_{\overrightarrow{AB}} = -2\sqrt{3}$
- La distance AB est : $AB = |z_B - z_A| = |-2\sqrt{3}|$; $AB = 2\sqrt{3}$
- $mes\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) = arg(z_B - z_A) = arg\left(-2\sqrt{3}\right)$; $Mes\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) = \pi$

Propriété 2

Soient A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives z_A ; z_B ; z_C et z_D $(A \neq B$ et $C \neq D)$.

On a : $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, où mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ désigne une mesure quelconque de l'angle de vecteurs $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Exemple d'application de la propriété

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$), on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : 1 + 2i ; 3+ 2i ; – 2i et 2i.

Déterminons la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$.

- A ≠ B et C ≠ D.
- On a : $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = 2i$, par suite : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 2; 3; 4

2. Caractérisation complexe de points alignés

Propriété

Soit A, B et C trois points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C $(A \neq B)$ et A ≠ C.

A, B et C sont alignés équivaut à $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ appartient à $\mathbb{R}^*$.

Exemple d'application de la propriété

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$), on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $1 + 2i$, $3 + 2i$, $-2i$ et $2i$. (A ≠ B et A ≠ D).

- Justifions que les points A, B et D sont alignés.
- Justifions que les points A, B et C ne sont pas alignés.

- A ≠ B et C ≠ D , on a : $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1}{2}$ et $\frac{-1}{2} \in \mathbb{R}^*$, donc les points A, B et D sont alignés.
- A ≠ B et C ≠ D, on a : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1-4i}{2}$. Les points A, B et C ne sont pas alignés car $\frac{-1-4i}{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{R}^*$.

Pour s'entraîner : Exercices 5; 6 ; 7

3) Caractérisation complexe des triangles particuliers

Propriété

Soit A, B et C trois points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C (A ≠ B et A ≠ C).

- ABC est un triangle isocèle en A équivaut à $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\theta}$, (θ ≠ kπ, k ∈ Z).
- ABC est un triangle équilatéral équivaut à $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
- ABC est un triangle rectangle en A équivaut à $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha i$, (α ∈ R*).
- ABC est un triangle rectangle et isocèle en A équivaut à $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$.

Exemple d'application

- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$).
  On considère les points E, F et G d'affixes respectives e, f et g telles que :
  $e = \sqrt{3} + i$; $f = -\sqrt{3} + i$ et $g = -2i$.
  Justifions que le triangle EFG est équilatéral.
  On a : E ≠ F et E ≠ G.
  On a : $f - e = -2\sqrt{3}$ et $g - e = -\sqrt{3} - 3i$;
  donc : $\frac{g-e}{f-e} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
  D'où : $\frac{g-e}{f-e} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, par suite, le triangle EFG est équilatéral.

- Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1 + 2i$, $3 + 2i$ et $1 + 5i$.
  Justifions que le triangle ABC est rectangle en A.
  On a : A ≠ B et A ≠ C.
  On a : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3i}{2}$.
  Par suite, le triangle ABC est rectangle en A, car $\frac{3i}{2}$ est un imaginaire pur non nul.

Pour s'entraîner : Exercices 8 ; 9; 10; 11; 12

4) Caractérisation complexe de l'angle droit

Propriété

Soit A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D, (A≠ B et C ≠ D).

La droite (AB) est perpendiculaire à (CD) équivaut à $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur non nul.

Exemple d'application

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$), on considère les points A, B , C et D d'affixes respectives : $-2-3i$; i ; $-4-4i$ et $-2-5i$.

Justifions que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Soit a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D.

On a : $\dfrac{b-a}{c-d}=\dfrac{2+4i}{-2+i}=\dfrac{(2+4i)(-2-i)}{5}$; $\dfrac{b-a}{c-d}=-2i$; $-2i \in i\mathbb{R}^*$, donc les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Pour s'entraîner : Exercices 13 ; 14

5) Caractérisation complexe de points cocycliques

Propriété

Soit A, B, C et D quatre points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que trois d'entre eux soient non alignés.

Les points A, B, C et D sont cocycliques équivaut à $\dfrac{z_C - z_A}{z_C - z_B} : \dfrac{z_D - z_A}{z_D - z_B}$ appartient à $\mathbb{R}^*$.

Exemple d'application

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$), on considère les points A, B , C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que : $a = -1$; $b = 1$; $c = i$ et $d = -i$.
Démontrons que les points A, B, C et D sont cocycliques.

On a : $c - a = 1+i$ et $c - b = -1+i = i(1+i)$; donc : $\dfrac{c-a}{c-b} = i$.

On a : $d - a = 1 - i$ et $d - b = -1 - i = -i(-i+1)$ donc : $\dfrac{d-a}{d-b} = -\dfrac{1}{i} = i$.

Par suite : $\left(\dfrac{c-a}{c-b}\right) : \left(\dfrac{d-a}{d-b}\right) = 1$.

$1 \in \mathbb{R}^*$ et les points A, B et C ne sont pas alignés, donc les points A, B, C et D sont cocycliques.

Pour s'entraîner : Exercices 15 ; 16; 17

II. ÉCRITURES COMPLEXES DE QUELQUES TRANSFORMATIONS DU PLAN

1) Écritures complexes des symétries

Propriété

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$).
M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z'.

- M' est l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe de repère (O; $\vec{u}$) si et seulement si $z' = \bar{z}$. On dit aussi que l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (O ; $\vec{u}$) est : $z' = \bar{z}$.

- M' est l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe de repère (O; $\vec{v}$) si et seulement si $z' = -\bar{z}$.
- On dit aussi que l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (O; $\vec{v}$) est : $z' = -\bar{z}$.
- M' est l'image de M par la symétrie centrale de centre O si et seulement si $z' = -z$. On dit aussi que l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre O est : $z' = -z$.
- L'écriture complexe de la symétrie centrale de centre Ω d'affixe ω est : $z' = -z + 2\omega$

Exemple d'application

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$).

- Soit M et M' deux points du plan d'affixes respectives z et z', telle que : $z' = -\bar{z}$. Donc M et M' sont symétriques par rapport à l'axe de repère (O ; $\vec{e}_2$).
- Le point B d'affixe $1 + i$ est le symétrique du point A d'affixe $1 - i$ dans la symétrie orthogonale d'axe (O; $\vec{e}_1$).
- L'écriture complexe de la symétrie centrale de centre O est : $z' = -z$.
- L'écriture complexe de la symétrie centrale de centre Ω d'affixe $\omega = 2 + i$ est : $z' = -z + 2(2 + i)$ c'est-à-dire $z' = -z + 4 + 2i$
- $z' = -z - 6 + i$ est l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre le point A d'affixe $-3 + \frac{1}{2}i$.

Pour s'entraîner : Exercices 18 ; 19; 20; 21, 22

2) Écriture complexe d'une translation

Propriété

M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z'.
L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle d'une translation de vecteur $\vec{u}$, d'affixe b si et seulement si $z' = z + b$.

Exemple d'application

$z' = z + 2 - 3i$ est l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2 - 3i$.

Pour s'entraîner : Exercices 23 ; 24; 25; 26, 27

3) Écriture complexe d'une rotation

Propriété

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$).
M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z'.

- L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle de la rotation de centre O et d'angle orienté de mesure θ si et seulement si $z' = e^{i\theta}z$.
- L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle orienté de mesure θ si et seulement si $z' = e^{i\theta}z + b$ où b est un nombre complexe, tel que : $b = \omega - e^{i\theta}\omega$.

Exemple d'application

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$).

- L'écriture complexe de la rotation de centre le point Ω d'affixe $-1 - i$ et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$ est $z' = e^{i\theta}z + b$ avec $b = (1 - e^{i\theta})\omega$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $\omega = -1 - i$.

$$z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)(-1-i) = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)z + (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(-1-i).$$

- L'écriture complexe de la rotation de centre le point Ω d'affixe -1 - i et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$ est

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)i$$

Justifions que la transformation du plan dont l'écriture complexe est $z' = iz + 1 + i$ est une rotation dont on déterminera l'angle et le centre.

z' peut s'écrire $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z + 1 + i$. Par suite cette transformation complexe est celle de la rotation d'angle orienté de mesure principale $\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω d'affixe ω telle que $1 + i = \omega - i\omega$.
D'où : $\omega = i$.

Pour s'entraîner : Exercices 28 ;29 ;30 ; 31; 32

4) Écriture complexe d'une homothétie

Propriété

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$).
M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z' et k est un nombre réel non nul.

- L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle de l'homothétie de centre O et de rapport k si et seulement si : $z' = kz$.
- L'écriture complexe d'une transformation du plan est celle de l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k si et seulement si $z' = kz+b$ où b est un nombre complexe, tel que $b = \omega - k\omega$.

Exemple d'application

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$).

- L'écriture complexe de l'homothétie de centre le point Ω d'affixe 1 + 3i et de rapport 2 est : $z' = kz + b$ avec $b = \omega - k\omega$.

On a : $k = 2$ et $b = 1 + 3i - 2(1+3i)$. Donc : $b = -1 - 3i$

Par conséquent, $z' = 2z - 1 - 3i$ est l'écriture complexe de l'homothétie de rapport 2 et de centre Ω d'affixe $1 + 3i$

M et M' sont des points du plan d'affixes respectives z et z'.
Soit h la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', tel que $z' = -2z + 1 - 2i$.
Justifions que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

z' peut s'écrire sous la forme $z' = kz + b$ où $k = -2$ qui est un nombre réel non nul et $b = 1 - 2i$. Par suite, h est l'homothétie de rapport −2 et de centre Ω d'affixe ω, telle que : $1 - 2i = \omega + 2\omega$.
D'où : $\omega = \frac{1-2i}{3}$.

Pour s'entraîner : Exercices 33 ;34; 35; 36

III. SIMILITUDE DIRECTE

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).

1) Définitions et propriétés

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).
M et M' sont deux points du plan et k un nombre réel strictement positif.
On appelle similitude de rapport k, toute transformation du plan, telle que pour tous points M et N d'images respectives M' et N', $M'N' = kMN$.
On appelle similitude directe de rapport k toute similitude qui conserve l'orientation des angles.

Propriété 1

Toute similitude directe de rapport k est :

soit une translation, soit une rotation, soit une homothétie, soit la composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport k.

Exemple d'application

Toute similitude directe de rapport 1 est soit une translation, soit une rotation.

Propriété 2

Toute similitude directe de rapport différent 1 admet un point invariant et un seul appelé centre de la similitude.

Remarques

Les rotations d'angle non nul ont un seul point invariant, le centre.

Exemple

- Toute similitude directe de rapport 1 est soit une translation, soit une rotation.
- Toute similitude directe de rapport 3 a un seul point invariant.
- Les translations de vecteur non nul n'ont pas de point invariant.

Propriété 3

Soit S une similitude de rapport k différent de 1 et de centre Ω. Il existe une unique homothétie H de rapport k de centre Ω et une rotation R de centre Ω et d'angle θ, telles que :

$S = HoR = RoH.$

L'angle de la rotation est appelé angle de la similitude S.

Notion

S est parfois notée : S(Ω ; k, θ)

Remarques

- Toute similitude directe de rapport différent de 1 est caractérisée par son rapport, son centre et son angle.
- Toute rotation est caractérisée par son centre et son angle (son rapport vaut toujours 1).
- Toute similitude directe qui n'est pas une translation est caractérisée par son rapport, son centre et son angle.

Exemple d'application

- La composée de l'homothétie de centre O et de rapport 2 et de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
- Toute homothétie de centre Ω et de k rapport négatif, est une similitude directe de centre Ω de rapport $-k$ et d'angle π.
- Toute homothétie de centre Ω et de k rapport positif, est une similitude directe de centre Ω de rapport k et d'angle 0.
- Les similitudes directes d'angle nul sont les homothéties de rapport positif et les translations.

Pour s'entraîner : Exercices 37 ; 38; 39; 40

2) Écriture complexe d'une similitude directe

Propriété 1

- Si S est une similitude plane directe, alors il existe un unique couple $(a\,;\,b)$ appartenant à $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, tel que l'écriture complexe de S soit : $z' = az + b$.
- L'application du plan dans lui-même associée à l'application complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', tel que $z' = az + b$ où a $\in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ est une similitude plane directe.

Exemple d'application

La transformation du plan dont l'écriture complexe est $z' = (1 + i)z + 2 - i$ est une similitude directe.

Propriété 2

Soit $z' = az + b$ l'écriture complexe d'une similitude directe qui n'est pas une translation.

- son centre est le point Ω d'affixe ω, telle que : $\omega = a\omega + b$.
- son rapport est : $k = |a|$.
- son angle est égal à $Arg(a)$.

Exemple d'application

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$).
La transformation du plan dont la transformation complexe est $z' = (1 - i)z$ est une similitude directe de centre O, de rapport $|1 - i|$ qui est $\sqrt{2}$ et d'angle $Arg(1 - i)$ qui est $-\dfrac{\pi}{4}$.

Pour s'entraîner : Exercices 41 ; 42; 43; 44

3) Images de figures simples par une similitude directe

Propriété

Par une similitude directe, l'image :
- d'un segment est un segment,
- d'une demi-droite est une demi-droite,
- d'une droite est une droite,
- d'un cercle est un cercle.

Exemple d'application

- Soit S la similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ dont l'écriture complexe est : $z' = (1 - i)z$.

Soit (D) la droite d'équation $y = -x + 3$.

Les points A et B d'affixes respectives $3i$ et $-1 + 2i$ appartiennent à la droite (D).

- Soit $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$.

On a ; $z_{A'} = (1-i)(3i) = 3+3i$ et $z_{B'} = (1-i)(-1+2i) = 1+3i$.

L'image de la droite (D) par S est la droite (D') = (A'B'). Une équation de (D') est : $y = 3$.

- Soit (C) le cercle de centre E d'affixe $-i$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

  - L'image (C') de (C) par S est un cercle.

  - Le centre de (C') est le point E' tel que : $E' = S(E)$.

  - L'affixe de E' est : $z_{E'} = (1-i)(-i) = -1-i$.

  - Le rayon de (C') est r' tel que : $r' = kr = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$.

(C') est le cercle de centre E' d'affixe $-1 - i$ et de rayon 4.

Une équation de (C') est : $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 16$.

Pour s'entraîner : Exercices 45 ; 46 ; 47

QUESTION 1

Comment déterminer la nature et les éléments caractéristiques d'une transformation du plan définie par son écriture complexe ? ($z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$) ?

Méthode

Pour déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation F du plan dont l'écriture complexe est sous la forme : $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, on peut procéder comme suit :

- Si $a = 1$, F est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.
- Si $a = -1$, F est la symétrie centrale de centre le point Ω d'affixe $\frac{b}{2}$
- Si $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1;1\}$, F est l'homothétie de rapport a et de centre le point Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$
- Si $a \in \mathbb{C}^*$, $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| = 1$, F est la rotation de centre le point Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle orienté $arg(a)$
- Si $a \in \mathbb{C}^*$, $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| \neq 1$, F est la similitude directe de centre le point Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$ et d'angle orienté $arg(a)$

Exercice

Dans chacun des cas ci-dessous, détermine la transformation du plan qui a pour écriture complexe :

1) $z' = z - 2i$ 2) $z' = -z + 1 - 2i$ 3) $z' = -\frac{3}{2}z$ 4) $z' = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$ 5) $z' = -2iz$.

Solution commentée

1) $z' = z - 2i$.
z' est sous la forme $z' = az + b$ où $a = 1$ et $b = -2i$.
Comme $a = 1$, la transformation du plan associée à cette écriture complexe est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-2i$.

2) $z' = -z + 1 - 2i$.
z' est sous la forme $z' = az + b$ où $a = -1$ et $b = 1 - 2i$.
Comme $a = -1$, la transformation du plan associée à cette écriture complexe est la symétrie centrale de centre le point Ω d'affixe $\frac{b}{2} = \frac{1}{2} - i$.

3) $z' = -\frac{3}{2}z$.
z' est sous la forme $z' = az + b$ $a = -\frac{3}{2}$ et $b = 0$
Comme $-\frac{3}{2} \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, la transformation du plan associée à cette écriture complexe est l'homothétie de centre le point Ω d'affixe $\frac{b}{1-a} = 0$ et de rapport $-\frac{3}{2}$.

4) $z' = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$
z' est sous la forme $z' = az + b$ où $a = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $b = 0$.

$a \in \mathbb{C}^*$, $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| = \left|-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$ donc la transformation du plan associée à cette écriture complexe est une rotation.

- Le centre de cette rotation est le point O d'affixe $\frac{b}{1-a} = 0$.
- L'angle orienté θ de cette rotation est :

$$\theta = \arg\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{2\pi}{3}.$$

On conclut que la transformation du plan associée à cette écriture complexe est la rotation de centre O d'affixe 0 et d'angle orienté $-\frac{2\pi}{3}$

5) $z' = -2iz$.
z' est sous la forme $z' = az + b$ où $a = -2i$ et $b = 0$.
$a \in \mathbb{C}^*$, $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| = |-2i| = 2$; $|a| \neq 1$, donc la transformation du plan associée à cette écriture complexe est une similitude directe.

- Le centre de cette similitude directe est le point O d'affixe $\frac{b}{1-a}=0$;
- Le rapport k de cette similitude directe est : $k=|a|=2$;
- L'angle orienté θ de cette similitude directe est : $\theta=\arg(-2i)=-\frac{\pi}{2}$.

On conclut que la transformation du plan associée à cette écriture complexe est la similitude directe de centre O d'affixe 0, de rapport 2 et d'angle orienté $-\frac{\pi}{2}$.

Exercice non corrigé

Dans chacun des cas ci-dessous, détermine la transformation du plan qui a pour écriture complexe :

1) $z'=-3z-1$ 2) $z'=(1-\sqrt{3}i)z-\sqrt{3}$ 3) $z'=-z+2+i$

4) $z'=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z$ 5) $z'=z-2i-3$; 6) $z'=-\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)z$.

QUESTION 2

Comment déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe définie par son centre Ω(ω), son angle orienté θ et son rapport k ?

Méthode

Pour déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe définie par son centre Ω(ω), son angle orienté θ et son rapport k, on peut procéder comme suit :

- on pose : $z' = az + b$ où a et b sont des nombres complexes à déterminer;
- on calcule a tel que : $a=ke^{i\theta}$;
- on calcule b tel que : $b = \omega(1 - a)$.

Exercice

Détermine l'écriture complexe de la similitude directe S de centre $A(3 + i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle orienté $\frac{3\pi}{4}$

Solution commentée

L'écriture complexe de S est de la forme $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes à déterminer.

- Calculons a tel que : $a=ke^{i\theta}$.

$a=ke^{i\theta}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$a=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$;

donc $a=-1+i$.

- Calculons b tel que : b tel que : $\omega = \frac{b}{1-a}$

$b=(1-a)\omega$

$b=(1+1-i)(3+i)=7-i$.

On conclut que l'écriture complexe de S est : $z'=(-1+i)z+7-i$

Exercice non corrigé

Dans chacun des cas suivants, détermine l'écriture complexe de la similitude directe S de centre Ω(ω) , d'angle orienté θ et de rapport k.

1) $\omega=0$; $\theta=-\frac{\pi}{6}$; $k=\sqrt{3}$; 2) $\omega=2+2i$; $\theta=\frac{\pi}{2}$; $k=\frac{1}{2}$.

QUESTION 3

Comment déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe définie par son centre Ω , un point et son image ?

Méthode

Pour déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe définie par son centre $\Omega(z_\Omega)$, un point A (z_A) et son image B(z_B) , on peut procéder comme suit :

- on pose : $z' = az + b$ où a et b sont des nombres complexes à déterminer;
- on pose : $\begin{cases} S(\Omega)=\Omega \\ S(A)=B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_\Omega = az_\Omega + b \\ z_B = az_A + b \end{cases}$;
- on résous le système ci-dessus d'inconnues a et b.

Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$) .

On donne les points Ω, A et B d'affixes respectives $z_\Omega = 1+i$; $z_A = -2+i$ et $z_B = 1-\dfrac{1}{2}i$.

Détermine l'écriture complexe de la similitude directe S de centre Ω qui transforme A en B.

Solution commentée

L'écriture complexe de S est de la forme : $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes à déterminer.

- On obtient le système suivant : $\begin{cases} S(\&)=\Omega \\ S(A)=B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} az_\Omega + b = z_\Omega \\ az_A + b = z_B \end{cases}$
- On résous le système ci-dessus.

$a(z_\Omega - z_A) = z_\Omega - z_B$; d'où : $a = \dfrac{z_\Omega - z_B}{z_\Omega - z_A}$; $a = \dfrac{1+i-1+\frac{1}{2}i}{1+i+2-i} = \dfrac{\frac{3}{2}i}{3} = \dfrac{1}{2}i$.

$b = z_\Omega - a = (1-a)z_\Omega$; d'où : $b = \left(1-\dfrac{1}{2}i\right)(1+i) = \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

- On conclut que l'écriture complexe de S est : $z' = \dfrac{1}{2}iz + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

Exercice non corrigé

Dans chacun des cas suivants, détermine l'écriture complexe de la similitude directe T de centre A qui transforme B en C.

1) $A(2+2i)$; $B(-4+2i)$; $C(2-i)$ 2) $A(2-i)$; $B(1-i)$; $C(1)$.

QUESTION 4

Comment déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe définie par deux points et leurs images ?

Méthode

A, B, C et D étant quatre points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes respectives z_A ;z_B ;z_C et z_D. S la similitude directe du plan qui transforme A en B et C en D.

Pour déterminer l'écriture complexe de S, on peut procéder comme suit :

- on pose : $z' = az + b$ où a et b sont des nombres complexes à déterminer;
- on pose : $\begin{cases} S(A)=B \\ S(C)=D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} az_A + b = z_B \\ az_C + b = z_D \end{cases}$
- on résous le système ci-dessus d'inconnues a et b

Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

Soit les points A(2) ; B($2i$) ; C($2 + 4i$) et D($4 + 2i$). Soit S la similitude directe telle que :

S(A) = B et S(C) =D.

Détermine l'écriture complexe de S.

Solution commentée

L'écriture complexe de S est de la forme: $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes à déterminer.

- On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} S(A) = B \\ S(C) = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} az_A + b = z_B \\ az_C + b = z_D \end{cases}$$

- On résous le système ci-dessus.

$a(z_C - z_A) = z_D - z_B$; d'où : $a = \dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A}$; $a = \dfrac{4+2i-2i}{2+4i-2} = \dfrac{4}{4i} = -i$.

$b = z_B - az_A = 2i - 2(-i)$; d'où : $b = 4i$.

- On conclut que l'écriture complexe de S est : $z' = -iz + 4i$.

Exercice non corrigé

donne : A(2) ; B($-2i$) ; C(-2) et D($2i$).

Détermine l'écriture complexe de la similitude directe S qui transforme A en B et C en D.

QUESTION 5

Comment déterminer le rapport et l'angle orienté d'une similitude directe définie par son centre, un point et son image ?

Méthode

S étant la similitude directe telle que : S(Ω) = Ω et S(A) = B , pour déterminer le rapport et l'angle orienté de cette similitude directe définie par son centre $\Omega(z_\Omega)$, le point A (z_A) et son image $B(z_B)$, on peut procéder comme suit :

- on calcule le rapport k tel que : $k = \dfrac{\Omega B}{\Omega A} = \dfrac{|z_B - z_\Omega|}{|z_A - z_\Omega|}$;
- on détermine l'angle orienté θ tel que : $\theta = mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}\right) = arg\left(\dfrac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega}\right)$.

Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

Détermine le rapport et l'angle de la similitude directe S de centre Ω($1 + 2i$) qui transforme le point A($1 - i$) en le point B($4 - i$).

Solution commentée

- Le rapport k de S est : $k = \dfrac{\Omega B}{\Omega A} = \dfrac{|z_B - z_\Omega|}{|z_A - z_\Omega|}$

- On a : $\dfrac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \dfrac{(4-i)-(1+2i)}{(1-i)-(1+2i)} = \dfrac{3-3i}{-3i} = 1 + i$. D'où, $k = |1+i| = \sqrt{2}$.

- L'angle orienté θ de S est :

$\theta = mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}\right) = arg\left(\dfrac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega}\right)$

on a : $\theta = \arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$

- On conclut que S est la similitude directe de centre Ω , de rapport √2 et d'angle orienté $\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice non corrigé

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

Soit A($-1 + i\sqrt{3}$) et B($1 + i$) deux points du plan.

Détermine le rapport et l'angle de la similitude directe S de centre O qui transforme A en B.

Exercices de fixation

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.

Nombres complexes, distances et angles

1 Détermine dans chacun des cas ci-dessous, la distance AB et une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{AB}})$

a) A($1 + i\sqrt{3}$) et B(2) ;

b) A($-2 + 4i$) et B($-4 + 2i$) ;

c) A($\sqrt{3} - 2i$) et B(i) ;

2 Soient les points A, B et C d'affixes respectives $-1 - 2i$, $2 - i$ et i.

Calcule les distances AB, AC et BC puis déduis- en la nature du triangle ABC.

3 Soient les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que : $a = \sqrt{3} + 2i$, $b = 2 + i$ et $c = i$.

1) Calcule : $\dfrac{a-c}{b-c}$

2) Désuis-en : Mes $(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{AC}})$.

4 Détermine, dans chacun des cas suivants, la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}})$

1)A $\left(-\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}i\right)$, B$(-1+i)$ et C$\left(\dfrac{1}{2}i\right)$.

2) A(-1), B($-2 + i$) et C(i)

Caractérisation complexe de points alignés

5 A, B et C sont trois points distincts du plan d'affixes respectives z_A , z_B et z_C.

Indique la bonne réponse.

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si :	$\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \in i\mathbb{R}^*$
	$\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \in \mathbb{R}^*$
	$\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = i$

6 Dans le plan complexe, on considère les points A($2- 3i$) ,B($-2 + i$) et C($-3 + 2i$).

Calcule l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis déduis-en que les points A, B et C sont alignés.

7 Dans le plan complexe, on considère les points A($4i$), B($1 + 7i$) et C($-1 + i$).

Démontre que les points A, B et C sont alignés.

Caractérisation complexe des triangles particuliers

8 Soient A, B et C trois points distincts d'affixes respectives a ,b et c telles que : $\dfrac{b-a}{c-a} = -i$

Écris la lettre qui donne la nature exacte du triangle ABC.

ABC est un triangle :

a) isocèle en A.

b) équilatéral.

c) rectangle et isocèle en A.

d) rectangle en A.

9 Calcule

A, B et C sont trois points distincts du plan d'affixes respectives z_A , z_B et z_C.

Dans chacun des cas ci-dessous, indique la bonne réponse.

Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A si et seulement si :	$\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \in i\mathbb{R}^*$
	$\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \in \mathbb{R}^*$
	$\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = i$ ou $\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = -i$

Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si :	$\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \in i\,\mathbb{R}^*$
	$\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \in \left\{e^{i\frac{\pi}{3}}\,;\,e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$
	$\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \in \{i;-i\}$

10 A, B et C sont trois points non alignés d'affixes respectives a,b et c, telles que : $2(b-a) = -i(c-a)$.

Détermine la nature du triangle ABC.

11 Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A

tel que : $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

Détermine $\frac{c-a}{b-a}$ où a, b et c sont les affixes respectives des points A, B et C.

12 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 2cm .

On considère les points A, B et C d'affixes respectives a,b et c telles que : $a = 2$; $b = 1 - i$ et $c = 1 + i$.

1. Place les points A, B et C dans le repère $(O; \vec{u},\vec{v})$.
2. Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

Caractérisation complexe de l'angle droit

13 Indique la bonne réponse ou les bonnes réponses.

A, B, C et D sont quatre points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si :	$\frac{z_A - z_B}{z_D - z_C} \in i\mathbb{R}^*$
	$\frac{z_A - z_B}{z_D - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_A - z_B}{z_D - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
	$\frac{z_A - z_B}{z_D - z_C} = i$ ou $\frac{z_A - z_B}{z_D - z_C} = -i$

14 Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives a , b et c telles que : $a = -2 - 3i$; $b = 2 + i$ et $c = 4 - i$.

1. Calcule $\frac{c-b}{a-b}$.
2. Déduis de ce qui précède la position relative des droites (AB) et (BC).

Caractérisation complexe de points cocycliques

15 Pour l'affirmation suivante, choisis la bonne réponse ou les bonnes réponses.

A, B , C et D sont quatre points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si :	$\frac{z_A - z_B}{z_D - z_C} : \frac{z_D - z_C}{z_A - z_B} \in \mathbb{R}^*$
	$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} : \frac{z_D - z_B}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}^*$
	$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} : \frac{z_B - z_D}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}^*$

16 Soient A, B et C les points d'affixes respectives $\sqrt{3} + i$; $2i$ et $-1 - i\sqrt{3}$

Démontre que les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

17 Soit A, B , C et D les points d'affixes respectives a,b,c et d telles que : $a = 2+i$; $b = 2 + 4i$; $c = -1 + i$ et $d = -1 + 4i$.

1 a) Calcule : $\frac{b-a}{c-a}$ et $\frac{b-d}{c-d}$

b) Calcule le quotient : $\left(\frac{b-a}{c-a}\right) : \left(\frac{b-d}{c-d}\right)$.

2) Justifie que les points A, B, C et D sont cocycliques .

Écriture complexe des symétries

18 Indique la bonne réponse.

La symétrie centrale de centre $\Omega(\omega)$ notée S_Ω admet pour écriture complexe :	$z' - \omega = z - \omega$
	$z' - \omega = -(z - \omega)$
	$z' - \omega = z + \omega$

19 Dans chacun des cas suivants, détermine l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre

Ω d'affixe ω.

a) $\omega = 1 + i$; b) $\omega = 0$; c) $\omega = -1 + 3i$.

20 Dans chacun des cas suivants, détermine la nature et le(s) élément(s) caractéristique(s) de la transformation S du plan d'écriture complexe :

a) $z' = -z + 1 - 2i$; b) $z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}z - 2 + 6i$; c) $z' = -z$

21 Soit S la transformation du plan d'écriture complexe : $z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}\bar{z}$.

1. Détermine la nature et l'élément caractéristique de S.
2. Détermine l'affixe de l'image du point $\Omega(1 - i)$ par S.

22 Soit S la transformation du plan d'écriture complexe : $z' = \bar{z}$.

1. Détermine la nature et l'élément caractéristique de S.
2. Détermine l'affixe de l'image du point $A(1 + i)$ par S.
3. Détermine l'affixe de l'antécédent du point $B(-2-i)$ par S.

Écriture complexe d'une translation

23 On note T la translation de vecteur $\vec{u}(-1+2i)$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.

1. Détermine l'écriture complexe de T.
2. Détermine l'image par T de chacun des points $A(-3 + i)$ et $B(2 - 3i)$

24 Soit le point A d'affixe $-1 + i$ et le point B d'affixe $-2 + 3i$.

Détermine l'écriture complexe de la translation T qui transforme A en B

25 Détermine la nature et l'élément caractéristique de chacune des transformations du plan dont l'écriture complexe est donnée .

a) $z' = z + 1 - 3i$,

b) $z' - 2 - 2i = z + 1 - i$,

c) $z' + z = 2z + i$.

d) $\dfrac{z' - z}{2} = -\dfrac{1}{2} - i$.

26 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit T la transformation du plan d'écriture complexe : $z' = z - 3 + 2i$.

Détermine la nature et l'élément caractéristique de T.

Détermine l'image par T du cercle de centre O et passant par le point A d'affixe a telle que : $a = 1 + i$.

27 Soit f la translation du plan d'écriture complexe : $z' = z + 3i$.

Détermine une équation de l'image par f de la droite (D) d'équation : $y - 2x + 1 = 0$.

Écriture complexe d'une rotation

28 Indique la bonne réponse.

L'écriture complexe de la rotation r de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ est :	$z' - \omega = \theta(z - \omega)$
	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$
	$z' - \omega = e^{\theta}(z - \omega)$

29 Détermine l'écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle orienté $\dfrac{\pi}{3}$

30

1. Détermine l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω d'affixe $2i$ et d'angle orienté $-\dfrac{\pi}{2}$.
2. Soit C l'antécédent de B d'affixe $1 - i$. Détermine l'affixe de C.

31 Soit A et B deux points d'affixes respectives $-\sqrt{2}$ et $-2 + i$.

Détermine l'écriture complexe de la rotation r d'angle orienté $\dfrac{3\pi}{4}$ qui transforme A en B.

32 Soit f la transformation du plan d'écriture complexe : $z' = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)z + 2 - \sqrt{3} + i$.

1. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f.
2. Soit O le point d'affixe 0 et O' son image par f.

   Détermine l'affixe du point O'.

Écriture complexe d'une homothétie

33 Détermine la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations du plan dont l'écriture complexe est donnée.

a) $z' = 3z$;

b) $z' = \dfrac{1}{2}z + 2 - i$;

c) $2z' - 4z = 8 - 6i$.

34 Soit H la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = 2z + 1 + i$.

1. a) Détermine l'affixe ω du point invariant de H.

   b) Calcule : $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$
2. Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de H

35 Détermine l'écriture complexe de l'homothétie H de rapport -2 et de centre Ω d'affixe $1 - i$.

36 Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives $1 - i$ et $2 - 3i$.

1. Détermine l'écriture complexe de l'homothétie H de rapport $\frac{1}{2}$ qui transforme A en B.
2. Déduis-en l'affixe du centre Ω de H

Similitude directe : définitions et propriétés

37 Recopie le numéro de chaque affirmation suvi de V si l'affirmation est vrai ou de F si l'affirmation est fausse .

N°	Affirmations
1	Toute homothétie de rapport -2 n'est pas une similitude directe.
2	La symétrie orthogonale d'axe (O ; $\vec{u}$) est une similitude directe.
3	La symétrie centrale de centre O est une similitude directe.
4	Toute similitude directe de rapport k est soit une translation, soit une homothétie, soit une rotation, soit la composée d'une homothétie et d'une rotation de rapport k.
5	Toute similitude directe de rapport 1 est soit une rotation, soit une translation.

38 Pour chacune des affirmations ci-dessous, réponds par vrai si l'affirmation est vraie ou par faux si l'affirmation est fausse, puis justifie tes réponses.

1. La symétrie centrale de centre O est une similitude directe

2. Toute similitude directe de rapport 2 est la composée d'une homothétie de rapport 2 et d'une rotation d'angle non nul .

3. Toute similitude directe de rapport 2 est la composée d'une homothétie de rapport 2 et d'une rotation.

39 Démontre que toute similitude directe qui laisse deux points distincts invariants est l'application identique.

40 Pour chacune des affirmations ci-dessous, réponds par vrai si l'affirmation est vraie ou par faux si l'affirmation est fausse

1. Toute similitude directe de rapport 2 est caractérisée par son centre et son angle orienté.
2. Toute similitude directe de rapport 1 est caractérisée par son centre et son angle orienté.
3. Toute similitude directe de rapport k différent de 1 est caractérisée par son rapport k, son centre et son angle orienté .
4. Toute rotation de centre Ω d'angle θ non nul est une similitude directe de rapport 1 de centre Ω et d'angle θ.

Écriture complexe d'une similitude directe

41 Indique la bonne réponse .

L'écriture complexe de la similitude directe S de centre $\Omega(\omega)$, de rapport k et d'angle θ est :	$z'-\omega=k(z-\theta)$
	$z'-\omega=ke^{i\theta}(z-\omega)$
	$z'-\omega=ke^{\theta}(z-\omega)$

42 Indique la bonne réponse .

La similitude directe d'écriture complexe $z'=(1+i)z-2i$ a pour centre $\Omega(\omega)$, rapport k et angle θ.	$\omega=2$; $\kappa=-\sqrt{2}$; $\theta=\frac{\pi}{4}$
	$\omega=2$; $\kappa=\sqrt{2}$; $\theta=-\frac{\pi}{4}$
	$\omega=2$; $\kappa=\sqrt{2}$; $\theta=\frac{\pi}{4}$

43 Soit l'application $f : M(z) \mapsto M'(z')$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f dans chacun des cas suivants :

a) $z'=(-1+i)(z-i)$

b) $z'+3i=z+2+2i$

c) $z'=-3iz$

d) $z'=-i+e^{\frac{i\pi}{3}}z$

e) $z'-2i=2iz$

44 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

Soit les points A(-1), B(-2 + i), C(i) et D(1 - 2i)

1. Détermine l'écriture complexe de la similitude directe S_1 qui laisse A invariant et transforme B en C.
2. Détermine l'écriture complexe de la similitude directe S_2 telle que : S_2 (A) = B et S_2 (C)=D.
3. Détermine l'écriture complexe de la similitude directe S_3 de centre C, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{-3\pi}{4}$

Images de figures simples par une similitude directe

45 Réponds par vrai si l'affirmation est vraie ou par faux si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	L'image d'une droite par une similitude directe est un segment.
2	L'image d'un cercle de rayon 3 par une similitude directe de rapport $\dfrac{1}{4}$ est un cercle de rayon $\dfrac{4}{3}$.
3	L'image de la demi- droite $[AB)$ par la similitude directe S est la demi- droite $[A'B')$ où $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$.
4	Toute similitude directe de rapport k conserve l'orthogonalité.
5	Toute similitude directe de rapport 2 conserve le barycentre.

46 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

Soit S la similitude directe de centre A d'affixe i, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle orienté $\dfrac{\pi}{3}$. Soit (D) la droite d'équation $x+y-1=0$.

Détermine une équation de (D'), image de (D) par S.

47 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

Soit S la similitude directe de centre O, de rapport 3 et d'angle orienté $-\dfrac{\pi}{6}$. Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 2.

Détermine une équation de (C'), image de (C) par S.

Déterminations d'une similitude directe

48 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

ABC est un triangle rectangle de sens direct.

On suppose que A est d'affixe 1 + i, B d'affixe 1 et C d'affixe 2 + i.

Donne l'écriture complexe de S

49 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).

On considère les points A et B d'affixes respectives i et j où $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$.

Justifie qu'il existe une similitude directe S de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ qui transforme A en B.

50 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u},\vec{v}$).

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives i, 1 + i, 1 + 3i et 2i.

1. Justifie qu'il existe une unique similitude directe S qui applique A sur B et C sur D.
2. Détermine son rapport et son angle.
3. a) Détermine l'écriture complexe de S.

   b) Détermine le centre de la similitude S.

51 ABCD est un carré de sens direct et de centre O.

Détermine le rapport et l'angle de la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

Exercices de renforcement /Approfondissement

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.

52 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives

$z_A = -1 + i\sqrt{3}$; $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$.

1. Place avec précision les points A, B et C dans le repère $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.
2. a) Vérifie que : $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

   b) Déduis-en la nature du triangle ABC.
3. Soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC.

   a) Détermine le centre et le rayon du cercle (Γ).

   b) Trace le cercle (Γ).

53 Résous dans ℂ le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} -z\sqrt{3} + z' = 2 \\ -z + z'\sqrt{3} = 2i \end{cases}$$

1. On considère les points M et N d'affixes respectives m et n telles que : $m = -\sqrt{3} + i$ et $n = -1 + i\sqrt{3}$
2. Écris m et n sous forme trigonométrique.

   a) Calcule le module et un argument de $\dfrac{n}{m}$.

   b) Déduis la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}})$ et la nature du triangle MON.

54 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que : $a = 2i$; $b = -7 + i$; $c = -8 - 2i$ et $d = 1 - 5i$.

1. Place les points A, B, C et D dans le repère $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.
2. a) Calcule : $\dfrac{d-a}{b-a}$

   b) Déduis-en la nature du triangle ABD.
3. Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.
4. Détermine le rayon et l'affixe du centre du cercle circonscrit aux triangles ABD et BDC.

55 Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives a,b et c telles que : $a = 2 - i$;

$b = 3 + 2i$ et $c = -4 + i$.

Soit f la translation d'écriture complexe : $z' = z + 1 + i$.

1. Calcule Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}})$
2. Détermine les affixes des points A'; B' et C' images respectives des points A ,B et C par f.
3. Calcule Mes $(\widehat{\overrightarrow{A'B'}\,?\,\overrightarrow{A'C'}})$
4. Que peux-tu en déduire concernant la translation f et les angles orientés ?

56 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère le point A d'affixe $1\,i\sqrt{3}$ et le point B d'affixe $1 - i\sqrt{3}$

1. a) Justifie que les points A et B sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.

   b) Construis ce cercle puis les points A et B.
2. On note C l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle orienté $-\dfrac{\pi}{2}$ et D l'image du point B par la rotation r_2 de centre A et d'angle orienté $\dfrac{\pi}{2}$.

   Calcule l'affixe de chacun des points C et D.

57 Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que :

$a = 2$; $b = 1 - i$ et $c = 1 + i$.

1. a) Place les points A, B et C dans le repère $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$

   b) Calcule le rapport $\dfrac{a-c}{a-b}$ puis, déduis-en la nature du triangle ABC.
2. On appelle r la rotation de centre A qui transforme B en C.

   a) Détermine l'angle de r.

   b) Détermine l'écriture complexe de r.

   c) Calcule l'affixe du point D image de C par r.
3. Soit (Π) le cercle de diamètre $[BC]$.

Détermine et construis l'image (Π') du cercle (Π) par la rotation r.

58 Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$, on considère les B, C et D d'affixes respectives -2 ; -1 - i et -2 + 2i.

Soit r la rotation de centre E d'affixe i et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

1. a) Place les points B, C et D dans le repère $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.

   b) Détermine l'écriture complexe de r.

c) Détermine l'affixe du point A antécédent de B par r et place A dans le même repère $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.

2. Démontre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon

59

1. On donne les points A, B et C d'affixes respectives a,b et c telles que : $a = 1 + 2i$; $b = -2 + i$ et $c = 2 - i$.

Calcule $\frac{c-a}{b-a}$ puis déduis la nature du triangle ABC.
Calcule l'aire du triangle ABC .

2. On considère l'homothétie h d'écriture complexe : $z' = 2z + 1 - i$ et on désigne par A', B' et C' les images respectives des points A, B et C par h.

a) Justifie que les droites (A'B') et (A'C') sontorthogonales.

b) Détermine l'aire du triangle A'B'C'.

60 L'unité graphique est 2 cm

1. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = (1 + i)z - 2i$.
2. Détermine et construis l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ tels que : $|(1+i)z-2i| = \sqrt{2}$.
3. Détermine l'image du cercle (C) de centre Ω(1+2i) et de rayon 1 par f.

61 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$. On donne le point A d'affixe a telle que :

a = $-1+3i$ et r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe i.

1. a) Détermine l'écriture complexe de r.

   b) Détermine l'affixe b du point B image du point A par r .

   c) Soit le point C d'affixe c telle que : $c = -1 - i$.

   Détermine l'affixe d du point D antécédent du point C par r.
2. a) Place dans le repère $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$ les points A,B ,C et D.

   b) Démontre que les points A,B ,C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. a) Démontre que les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

   b) Calcule les distances AD et BC.

   c) Justifie que le quadrilatère ADBC est un trapèze isocèle .

62 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par : $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i\right)z_n$.

On définit la suite (r_n) définie par : $r_n = |z_n|$, pour tout entier naturel n.

1. Donne la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$
2. a) Justifie que la suite (r_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b) Déduis -en l'expression de r_n en fonction de n.

   c) Détermine la longueur OA_n lorsque n tend vers +∞.

63 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par S la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = (1+i)z - i$.

1. a) Justifie que S est une similitude directe du plan dont on donnera les éléments caractéristiques. (On notera Ω le point invariant de S).

   b) Donne une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{MM'})$, en supposant que $M \neq \Omega$.
2. a) Construis le point M' pour un point M donné.

   b) Détermine l'image (D') par S de la droite (D) d'équation $y = x$. Construis (D').
3. a) Justifie qu'il existe un point B du plan distinct de Ω et un seul tel que les affixes z_B de B et $z_{B'}$ de $B' = S(B)$ soient liées par la relation $z_B \times z_{B'} = 1$.

   b) Construis les points B et B'.

   c) Soit Ω' le symétrique de Ω par rapport à O.
4. Justifie que les points Ω , Ω' , B et B' sont cocycliques.

64 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(A\,;\,\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

Soit C(√2 ;1) et S la similitude directe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = az + b$ où a et b sont des nombres complexes avec a non nul.

1. Détermine les nombres complexes a et b tels que S(D) = C et S(C) = B.

2. Soit T la similitude directe qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = -i\frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Détermine le rapport et l'angle de T.
3. Justifie que la similitude T transforme B en I milieu de [AB].
4. Déduis que les droites (BD) et (CI) sont orthogonales.

65 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O; $\vec{u}, \vec{v}$). L'unité graphique est le centimètre. On donne le point A d'affixe i.

Soit (Γ) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant:
$|(1 - i\sqrt{3})\, z - \sqrt{3} - i| = 6$.

1. a) Démontre qu'un point M appartient à (Γ) si et seulement si son affixe vérifie: $|z - i| = 3$.
   b) Déduis la nature de (Γ).
2. On considère les points B et C d'affixes respectives $\sqrt{3}$ et $-4i$.

L'application S est la similitude directe qui applique A sur O et B sur C.
Soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z', tel que M' est l'image de M par S.

a) Démontre que : $z' = (1 - i\sqrt{3})\, z - \sqrt{3} - i$.
b) Détermine les éléments caractéristiques de S. On notera Ω son centre.

3. On désigne par (C) l'image de (Γ) par S.
   a) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (C).
   b) Construis (C) et (Γ).
4. Soit D le point tel que: D ∈ (ΩB) et $\overrightarrow{\Omega D} = 2\overrightarrow{\Omega B}$.
   a) Construis les points D et Ω dans le plan muni du repère (O; $\vec{u}, \vec{v}$).
   b) Démontre que le triangle ΩCD est équilatéral.
5. Soit r la rotation de centre Ω qui transforme C en D.
   a) Détermine l'écriture complexe de r.
   b) Calcule l'affixe de D.

66 On considère le polynôme P défini par :
$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1. Calcule P($i\sqrt{3}$) et P($-i\sqrt{3}$), puis démontre qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout $\mathbb{Z} \in \mathbb{C}$, on ait: P(z) = $(z^2 + 3)Q(z)$.
2. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct (O; $\vec{u}, \vec{v}$).
On considère les points A et Ω d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}$ et $z_\Omega = -3$.
   a) Construis :
      - le point B symétrique de A par rapport à l'axe des réels;
      - le point C image de A par l'homothétie de centre Ω et de rapport 2;
      - le point D image de C par la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.
   b) Détermine les affixes z_B, z_C et z_D des points B, C et D.
   c) Démontre que le triangle ACD est rectangle en A.
   d) Démontre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle.
4. On note E le symétrique de D par rapport à O.
   a) Démontre que : $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
   b) Déduis-en la nature du triangle BEC.

67 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O; $\vec{u}, \vec{v}$).

L'unité graphique est 4 centimètres.
On donne les nombres réels r strictement positif et α appartenant à l'intervalle]- π ; π] et on désigne par u le nombre complexe de module r et d'argument α.

1. On construit les points A_n répondant aux conditions suivantes :
   - A_0 est l'origine du repère ;
   - A_1 est le point d'affixe i ;
   - pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, le point A_n est l'image du point A_{n-2} par la similitude de centre A_{n-1}, de rapport r et d'angle orienté de mesure principale α. On note, pour tout entier naturel n, z_n l'affixe du point A_n.

   a) Écris une relation entre z_n, z_{n-1} et z_{n-2}.
   b) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, on a :
   $z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1} i$.
   c) Détermine l'expression de z_n en fonction de n et de u.
2. a) Démontre qu'il existe une similitude directe S et une seule, telle que : $A_1 = S(A_0)$ et $A_2 = S(A_1)$.
   b) Détermine les éléments caractéristiques de S.
   c) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+1} = S(A_n)$.
3. On note S_0 l'application identique du plan, et pour tout entier naturel n, on pose : $S_{n+1} = S \circ S_n$.

a) Soit p un entier naturel donné. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+p} = S_n(A_p)$.

b) Pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, démontre que S_α est une homothétie H dont on précisera le centre et le rapport.

c) Déduis-en que dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{4}$, les points A_n sont éléments d'un ensemble formé par la réunion de quatre droites que l'on précisera.

On suppose dans toute la suite que r est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que α est égal $\frac{\pi}{4}$ et on désigne par Ω le centre de la similitude S.

4. a) Démontre que pour tout entier naturel n, les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ sont orthogonaux.

   b) Représente graphiquement les points A_0, A_1, ..., A_9 dans le repère $(\Omega\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 4 centimètres.

   c) Calcule ΩA_n en fonction de n et de ΩA_0.

   d) Déduis-en $\lim\limits_{n \to +\infty} \Omega A_n$.

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $L_n = \sum_{i=0}^{n} A_i A_{i+1}$.

Étudie la limite de la suite $(L_n)_{n \geq 0}$ quand n tend vers l'infini.

Situations complexes

68 Le tableau ci-dessous appelé les « sept carrés » par son auteur a reçu un prix au concours d'arts d'un lycée. Invité par le professeur d'art plastique, il explique qu'il a commencé par construire le carré 1 et que chaque carré s'obtient à partir du précédent par une similitude directe de centre le point d'intersection des axes en pointillés.

Émerveillé, tu décides de déterminer cette similitude afin de présenter un tableau similaire au prochain concours d'arts.

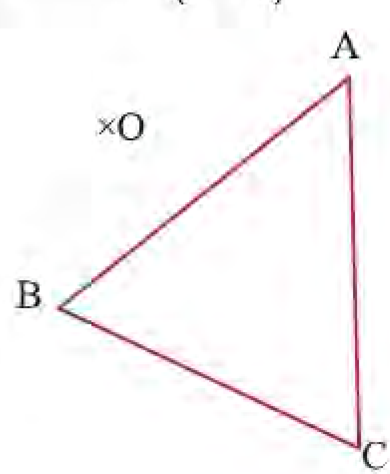
Reproduis le tableau et justifie cette reproduction.

69 Ton père possède un champ triangulaire de 2,5 ha situé dans une zone marécageuse. En prélude à la saison de pluie de cette année, la Direction Régionale de l'agriculture décide de délocaliser tous les champs de cette zone. Informé, ton père se rend à la Direction Régionale où l'ingénieur en charge des délocalisations lui fournit le document ci-dessous relatif à la situation de son nouveau champ. Ne comprenant pas ce document, il te sollicite pour savoir : la forme et l'aire de son nouveau champ. Il souhaite également obtenir un plan du nouveau champ.

Exploite le document fourni par la Direction Régionale pour répondre aux préoccupations de ton père.

DOCUMENT FOURNI :

Le nouveau champ A'B'C' est l'image de l'ancien champ ABC par la similitude : $S\left(O; 2; \frac{\pi}{4}\right)$.



9 SUITES NUMÉRIQUES

Commentaire de la Leçon

Dès l'Antiquité, Archimède de Syracuse (−287 ; −212), met en œuvre une procédure itérative pour trouver une approximation du nombre π . Il encadre le cercle par des polygones inscrits et circonscrits possédant un nombre de côtés de plus en plus grand. Par ce procédé, Archimède donne naissance, sans le savoir, à la notion de suite numérique. Vers la fin du XVII^e siècle, des méthodes semblables sont utilisées pour résoudre des équations de façon approchée pour résoudre des problèmes de longueurs, d'aires, ... Un formalisme plus rigoureux de la notion de suite n'apparaîtra qu'au début du XIX^e siècle avec le mathématicien français Augustin Louis Cauchy (1789 ; 1857).

Dans nos programme scolaires, les suites arithmétiques et géométriques sont connues depuis la classe de première D. Ici il s'agira essentiellement d'étudier le comportement d'une suite à l'infini (majoration, minoration, convergence, divergence, sens de variation etc.)

On pourra s'appuyer sur l'utilisation de la calculatrice et des graphiques pour introduire la notion de convergence d'une suite.

On peut faire comprendre aux élèves :

- que pour certaines suites, tous les termes à partir d'un certain rang, sont aussi proches que l'on veut d'un nombre réel a ;
- que pour d'autres suites, les termes à partir d'un certain rang, prennent des valeurs aussi grandes que l'on veut ;
- qu'il existe des suites qui ont des comportements irréguliers.

Le raisonnement par récurrence sera suggéré dans l'énoncé des exercices et des évaluations, lorsque son utilisation est indispensable.

Les suites numériques interviennent dans la modélisation de plusieurs activités relatives par exemple aux banques, assurances, commerces etc.

Habiletés et Contenus

- **Connaître** la définition d'une suite majorée, minorée ou bornée ; la définition d'une suite convergente ou divergente ; les propriétés sur les suites monotones ; toute suite croissante et majorée converge, toute suite décroissante et minorée converge ; la propriété: si (u_n) est une suite convergente vers a et f une fonction continue en a, alors la suite $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(a)$; les propriétés des suites récurrentes définies par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$; les propriétés sur la divergence des suites numériques ; toute suite croissante et non majorée a pour limite $+\infty$; toute suite décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$; les propriétés sur la convergence ; des suites géométriques, des suites arithmétiques, des suites du type n^α ; les théorèmes de comparaison ; les propriétés sur les limites et comportements asymptotiques comparés des suites $(ln\ n)$; (a^n), $a > 0$ et (n^α), α réel .
- **Savoir** mener un raisonnement par récurrence.
- **Reconnaître** une suite géométrique convergente ou divergente ; une suite du type n^α convergente ou divergente.
- **Démontrer** qu'une suite est monotone ; qu'une suite est majorée et/ou minorée ; qu'une suite est convergente ou divergente.
- **Conjecturer** le comportement d'une suite récurrente.
- **Déterminer** la plus petite valeur de n telle que : $u_n \geq 10^p$, $p \in \mathbb{N}$; la plus petite valeur de n telle que :$|u_n - l| \leq 10^p$, $p \in \mathbb{N}$; la limite d'une suite.
- **Traduire** une situation donnée à l'aide d'une suite ; arithmétique ; géométrique ; arithmético-géometrique.
- **Traiter une situation** faisant appel aux suites numériques.

Situation d'Apprentissage

Dans le souci d'avoir assez de revenus pour l'organisation des festivités de fin d'année, le président de la promotion terminale veut effectuer le placement de la somme de 300.000 CFA qu'ils ont dans leur caisse au premier janvier de cette année.
Il se rend dans une structure bancaire et le banquier lui propose deux options.
Option 1 : le capital placé est augmenté de 2500 CFA à intérêts simples par mois.
Option 2 : le capital placé augmentera de 5% de mois en mois pendant la durée du placement.

Le budget de la manifestation étant de 400.000 CFA, le président voudrait connaître l'option la plus avantageuse pour obtenir rapidement cette somme avant la date de la manifestation fixée au début du mois d'août de cette année.
Le major de cette promotion affirme que le problème peut être résolu à l'aide de suites particulières. Forts de ces informations et voulant aider leur président, les élèves de la promotion terminale décident de faire des recherches sur les suites arithmétiques et géométriques.

Activité 1 Suite majorée

Soit la suite numérique (u_n) définie pour tout nombre entier naturel n non nul, par $u_n = \frac{1}{n}$.
Démontre que pour tout nombre entier naturel n non nul, $u_n \leq 1$.

Récapitulons

On dit que la suite (u_n) est majorée par le nombre réel 1.

D'une façon générale, soit E une partie de $\mathbb{N}$.

Une suite (u_n) est majorée sur E lorsqu'il existe un nombre réel M tel que pour tout nombre entier n appartenant à E, $u_n \leq M$.

M est appelé un majorant de la suite (u_n).

Exercice de fixation

1 Soit (u_n) la suite de nombres réels définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{3n}{n+1}$.
Justifie que (u_n) est majoré par 3.

Activité 2 Suite minorée

Soit la suite numérique (v_n) définie pour tout nombre entier naturel n non nul par : $v_n = \frac{3}{n} + 2$.
Démontre que pour tout nombre entier naturel n non nul : $v_n \geq 2$.

Récapitulons

On dit que la suite (v_n) est minorée par le nombre réel 2.

D'une façon générale, soit E une partie de $\mathbb{N}$.

Une suite (v_n) est minorée sur E lorsqu'il existe un nombre réel m tel que pour tout nombre entier n appartenant à E, $v_n \geq m$.

Exercice de fixation

2 Soit (v_n) la suite des nombres réels définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \frac{2}{n} - 1$.
Justifie que (v_n) est minorée par − 1.

Activité 3 Suite bornée

Soit la suite numérique (u_n) définie pour tout nombre entier naturel n non nul, par : $u_n = \frac{1}{n}$.
Démontre que u_n est majorée par 1 et minorée par 0.

Récapitulons

On dit que la suite (u_n) est bornée.

Soit E une partie de $\mathbb{N}$. Une suite (u_n) est bornée sur E lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée .

Exercice de fixation

3 Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général : $w_n = \dfrac{\cos n}{1+n^2}$

Justifie que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Activité 4 Raisonnement par récurrence

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$

1. Vérifie que : $u_0 \leq 3$.

En supposant que pour un nombre entier naturel k, $u_k \leq 3$, démontre que : $u_{k+1} \leq 3$.

2. Déduis-en que pour tout nombre entier naturel n, $u_n \leq 3$.

Récapitulons

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété P(n) est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un certain entier naturel n_0,

1. on vérifie que : $P(n_0)$ est vraie ;
2. on suppose que $P(k)$ est vraie pour un nombre entier naturel k tel que $k \geq n_0$ et on démontre que $P(k+1)$ est vraie ;
3. on conclut que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout nombre entier naturel n tel que : $n \geq n_0$.

Exercices de fixation

4 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 4,\ pour\ n \geq 0 \end{cases}$$

Démontre par récurrence que : pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n - 2$.

5 Démontre par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Activité 5 Sens de variation d'une suite numérique

Partie I

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.

On se propose de démontrer que :

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante si et seulement si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.
- Le cas [$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante si et seulement si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$] se démontre de la même manière.

1. Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. Justifie que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.
2. Réciproquement, supposons que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$ et démontrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. Il s'agit de démontrer que $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $m < n \Rightarrow u_m < u_n$. Remarquons que $u_m < u_n$ revient à justifier que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $u_m < u_{m+k}$.

À l'aide d'un raisonnement par récurrence sur k,

a) Justifie que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $u_m < u_{m+k}$.

b) Conclus.

Partie II

1. Soit (u_n) la suite arithmétique définie par : $u_n = rn + b$, $(r \neq 0)$, pour tout nombre entier naturel n.
   Étudie selon le signe de r, le sens de variation de la suite (u_n).
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite géométrique définie par : $v_{n+1} = v_0 q^n$.
   a) Justifie que : $v_{n+1} - v_n = q^n v_0(q-1)$.
   b) De la consigne a), déduis selon les valeurs de v_0 et de q, le sens de variation de la suite (v_n).

Récapitulons

- Soit $(u_n)_{n\in E}$ une suite numérique.

Si pour tout n élément de E, $u_{n+1} - u_n > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante sur E.

Si pour tout n élément de E, $u_{n+1} - u_n < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante sur E.

- Une suite arithmétique de raison r est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si et seulement si r est strictement positif (resp. strictement négatif).

- Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0 différent de 0.

On suppose que $v_0 > 0$.

✓ si $q > 1$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
✓ si $0 < q < 1$, alors$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
✓ si $q = 1$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

On suppose $v_0 < 0$.

✓ si $q > 1$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
✓ si $0 < q < 1$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
✓ si $q = 1$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

› Remarque

Si $q < 0$, alors les termes de la suite sont alternativement positifs et négatifs.
La suite n'est ni croissante, ni décroissante.

Exercices de fixation

6 Soit (u_n) une suite de nombres réels.
Recopie le numéro de chaque affirmation suivi V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. Une suite constante est croissante.
2. Un suite arithmétique de raison r strictement positive est croissante.
3. Une suite géométrique de raison q, telle que $q > 1$ est toujours croissante.

7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Étudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8 Détermine dans chaque cas, le sens de variation de la suite géométrique (v_n) :

1) $v_n = \dfrac{-2}{3^n}$; 2) $\begin{cases} v_0 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2v_n \end{cases}$;

3) $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} v_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 0{,}25v_n \end{cases}$.

Activité 6 Limite infinie d'une suite numérique

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2n + u_n$.

1. À l'aide de ta calculatrice, complète le tableau ci-dessous :

n	1	2	3	4	5	6
u_n						

2. Justifie que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2n$.
3. Peux-tu trouver un entier naturel n tel que $u_n > 10^6$?

Récapitulons

On peut rendre (u_n) aussi grand que l'on veut à condition de choisir n suffisamment grand. On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$, lorsque n tend vers $+\infty$. On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

› Remarque

- La limite d'une suite se calcule en $+\infty$.
- Une suite (v_n) peut aussi tendre vers $-\infty$. On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Exercices de fixation

6 Pour chacune des affirmations suivantes, recopie le numéro suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. La suite $(-1)^n$ tend vers $+\infty$.
2. Toute suite bornée ne peut pas tendre vers $+\infty$.

Activité 7 Limite finie d'une suite numérique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n \in N,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$.

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

a) Trace les droites (D) et (Δ) d'équations respectives : $y = \frac{1}{3}x + 2$ et $y = x$, puis place les quatre premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.

b) Utilise cette construction pour conjecturer l'existence d'un nombre réel ℓ tel qu'il est possible de rendre u_n aussi proche que l'on veut de ℓ en choisissant n suffisamment grand.

Récapitulons

En choisissant n suffisamment grand, on constate graphiquement que l'on peut rendre u_n « aussi proche que l'on veut de 3 ». On dit que u_n tend vers 3 lorsque n tend vers $+\infty$.

- 3 est appelé la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On écrit : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$.
- 3 est un nombre réel, on dit que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est finie.
- Lorsque la suite (u_n) admet une limite finie, on dit qu'elle est convergente.
- Lorsqu'une suite n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Exercice de fixation

9 À chacune des affirmations suivantes, recopie et réponds par (V), si l'affirmation est vraie ou par (F) si l'affirmation est fausse.

1. La suite de terme général $(-1)^n$ est convergente.
2. La suite de terme général $\sin(n)$ est divergente.

Activité 8 Limites des suites définies par une formule explicite

On considère la fonction définie $[0 : +\infty[$ par $f(x) = -2 + \frac{5}{x^2+1}$ et la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par : $U_n = f(n)$.

1. Détermine la limite de f en $+\infty$.
2. a) Détermine la formule explicite de la suite (u_n).
   b) Déduis-en la limite de la suite (u_n).

Récapitulons

Soit une suite (u_n) définie par une formule explicite du type $u_n = f(n)$ où f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

Exercices de fixation

8 Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$, où f est une fonction numérique.
À chacune des affirmations suivantes, recopie et réponds par (V), si l'affirmation est vraie ou par (F) si l'affirmation est fausse.

1. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ $(L \in \mathbb{R})$, alors la suite (u_n) converge.
2. Si une suite numérique est convergente, alors sa limite vaut $+\infty$.

10 En utilisant la limite de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ en 0, calcule la limite de la suite (u_n) de terme général $u_n = n \sin \dfrac{1}{n}$.

Activité 9 Limites d'une suite géométrique

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q.

1. Exprime v_n en fonction de v_0 et de q.
2. Étudie selon les valeurs de q la convergence de la suite (v_n).

Récapitulons

Si $q > 1$ et $v_0 > 0$, alors $\lim v_n = +\infty$.

Si $q > 1$ et $v_0 < 0$, alors $\lim v_n = -\infty$.

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim v_n = 0$.

Si $q = 1$, alors $\lim v_n = 1$.

Si $q \leq -1$, alors la suite (v_n) n'a pas de limite.

Exercice de fixation

11 Détermine : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[-4\left(\dfrac{\sqrt{12}}{2}\right)^n\right]$

12 Détermine : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{5^n - 2^n}{2^n + 5^n}\right)$.

Activité 10 Limites d'une suite du type $u_n = n^\alpha$

n est un entier naturel non nul et α, un nombre réel quelconque.
En remarquant que : $n^\alpha = e^{\alpha \ln n}$, étudie selon les valeurs du nombre réel α la limite de la suite (u_n).

Récapitulons

1. Si $\alpha < 0$, alors la suite (u_n) converge vers 0.
2. Si $\alpha = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
3. Si $\alpha > 0$, alors la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice de fixation

13 Pour chaque limite, écris le numéro de la ligne suivie de la lettre correspondant à la bonne réponse.

		A	B	C
1	$\lim\limits_{n \to +\infty} n^{-2} = \cdots$	0	1	$+\infty$
2	$\lim\limits_{n \to +\infty} n^{3} = \cdots$	0	1	$+\infty$

14 Détermine la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général : $v_n = \dfrac{1}{n^4}$.

15 Détermine la limite de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ terme général : $w_n = n^5$

Activité 11 Croissance comparée des suites n^{α}, a^n et $\ln n$

Justifie chacune des propositions suivantes :

P1 : Si $\alpha > 0$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{\ln n}{n^{\alpha}}\right) = 0$.

P2 : Si $a > 1$ et $\alpha > 0$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{n^{\alpha}}{a^n}\right) = 0$.

P3 : Si $0 < a < 1$ et $\alpha < 0$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{n^{\alpha}}{a^n}\right) = +\infty$.

Récapitulons

Ces propriétés permettent de comparer la croissance des suites n^{α}, a^n et $\ln n$.

Exercice de fixation

16 Détermine les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{n^3}{2^{n-1}} - \dfrac{n^3}{n \times 2^n}\right)$; b) $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{-3 \times 2^n}{n}\right)$.

17 Étudie les limites éventuelles de la suite (u_n).

a) $u_n = n\ln n$; b) $u_n = \dfrac{\ln n}{n^{0,1}}$;

c) $u_n = \sqrt{n} \times (0,5)^n$; d) $u_n = \dfrac{n^4}{(1,05)^n}$.

Activité 12 Propriétés de comparaison

Soit (u_n) une suite numérique.
Complète dans ton cahier les propositions incomplètes ci-dessous relatives à la limite de la suite (u_n) en justifiant.

a) S'il existe une suite (v_n) telle que $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, alors...

b) S'il existe une suite (v_n) telle que $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, alors...

c) S'il existe une suite (v_n) et une suite w_n telle que $w_n \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$, alors...

Récapitulons

On admettra que les propriétés de comparaison des limites des fonctions déjà connues restent applicables aux suites numériques.

Exercices de fixation

18 Détermine les limites des suites suivantes :

1) $\lim\limits_{n \to +\infty}(n^2 + (-1)^n)$; 2) $\lim\limits_{n \to +\infty}(n + \sin(n))$.

19 Détermine chacune des limites suivantes.

1) $\lim\limits_{n \to +\infty}\dfrac{\sin(n)}{n}$; 2) $\lim\limits_{n \to +\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

Activité 13 Limite d'une suite monotone

Soit (u_n) une suite numérique.
Complète dans ton cahier les propositions incomplètes ci-dessous relatives à la limite de la suite (u_n) en justifiant.

a) Si une suite (u_n) est croissante et majorée, alors ...
b) Si une suite (u_n) est décroissante et minorée, alors ...

Récapitulons

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Exercice de fixation

20 Soit (u_n) une suite de nombre réels.
Recopie le numéro de chaque affirmation suivi V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. Toute suite croissante (u_n), telle que, pour tout nombre entier naturel supérieur à 10, $u_n < 1$, converge.
2. Toute suite décroissante (u_n), telle que, pour tout nombre entier naturel, $u_n < 1$, converge.
3. Toute suite décroissante et à termes positifs est convergente.
4. Toute suite croissante à termes négatifs est convergente.

21 Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}$

1. Démontre par récurrence sur n que la suite (u_n) est majorée par 3.
2. Calcule en fonction de u_n, la différence $u_{n-1} - u_n$ et détermine le sens de variation de la suite (u_n).
3. Déduis des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

Activité 14 Suites définies par une formule de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Reprenons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}.$$

1. Détermine la fonction f telle que : $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. a) Représente graphiquement la fonction f dans le plan muni du repère (O, I, J)

b) Construis sur la droite (OI) les quatre premiers termes de la suite (u_n) et conjecture la limite de la suite (u_n).

c) En utilisant les résultats de l'exercice précèdent, justifie que la suite (u_n) possède une limite ℓ telle que : $\ell \leq 3$.

3. a) Justifie que ℓ est une solution de l'équation :

$$\ell = \frac{9}{6-l}.$$

b) Déduis en que : $\ell = 3$.

Récapitulons

Soit (u_n) une suite numérique et f est une fonction telle que : $u_{n-1} = f(u_n)$.
Si la suite (u_n) converge vers ℓ, et si f est continue en ℓ, alors ℓ est une solution de l'équation : $f(\ell) = \ell$.

Exercice de fixation

22 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 1,\ pour\ n \geq 0 \end{cases}.$$

On suppose que la suite (u_n) est convergente et à termes positifs.

Détermine la limite de la suite (u_n).

I. RAPPEL SUR LES SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Caractérisation par une relation de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$, u_0 donné.	$u_{n+1} = q \times u_n$, u_0 donné.
Formule explicite	$u_n = (n-k)r + u_k$ k est un nombre entier naturel donné.	$u_n = u_k \times q^{n-k}$. k est un nombre entier naturel donné. ($n \geq k$)
Relation entre u_n et u_p, n et p étant des nombres entiers naturels	$u_n = u_p + (n-p)r$.	$u_n = u_p \times q^{n-p}$. ($n \geq ps$)
Somme de termes consécutifs	$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$. $p \leq n$	$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$. ($p \leq n$, si $q \neq 1$)

$n - p + 1$ est le nombre de termes de la somme $u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n$.

Exemple d'application

1) Calculons la somme des 15 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 2{,}3$ et de raison $r = 3{,}1$.

2) Calculons la somme des 10 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_1 = 9$ et de raison $q = 4$.

1) Le quinzième terme est bien u_{15}, car la suite commence par u_1.

Le nombre de termes est $(15 - 1) + 1 = 15$.

$$S = 15 \times \frac{(u_1 + u_{15})}{2}$$

On a : $u_1 = 2{,}3$; $u_n = u_1 + (n-1)r$, donc :

$u_{15} = u_1 + 14 \times r = 45{,}7$.

$$S = 15 \times \frac{2{,}3 + 45{,}7}{2}$$

S = 360.

2) Le dixième terme est bien u_{10} car la suite commence par u_1.

$$S = 9 \times \frac{4^{10} - 1}{4 - 1}$$

S = 3145725.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 4

II. SUITES MAJORÉES, SUITES MINORÉES, SUITES BORNÉES.

Définition

On dit qu'une suite numérique (u) définie sur une partie E de $\mathbb{N}$ est :

- **majorée**, s'il existe un nombre M tel que : $\forall\ n \in E,\ u_n \leq M$
- **minorée**, s'il existe un nombre réel m tel que : $\forall\ n \in E,\ u_n \geq m$.
- **bornée**, si elle est à la fois majorée et minorée.
- **positive**, si elle est minorée par 0.
- **négative**, si elle est majorée par 0.

Exemple

La suite définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}$ est bornée.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 4

III. SENS DE VARIATIONS D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in E}$ une suite numérique.
Si pour tout n élément de E, $u_{n+1} - u_n > 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in E}$ est strictement croissante sur E.

Si pour tout n élément de E, $u_{n+1} - u_n < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in E}$ est strictement décroissante sur E.

IV. LIMITE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est convergente lorsqu'elle admet une limite finie.
Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Propriété (unicité de la limite)

Si une suite admet une limite, alors cette limite est unique.

Propriété

- Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$.
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, ($l\in\mathbb{R}$ ou l est infini), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exemple d'application

- Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n, par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.
  La suite (u_n) converge vers 1, car lim u_n = 1.
- Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par : $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$.

  La suite (u_n) diverge vers +∞, car lim u_n = +∞.

Pour s'entraîner : Exercice 1 ; 4

Propriété

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite croissante et non majorée diverge vers +∞.
- Toute suite décroissante et non minorée diverge vers −∞.

Propriété

Soit f une fonction, D_f son ensemble de définition et (u_n) une suite d'éléments de D_f.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, alors
$\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$. ($l \in \mathbb{R}$)

V. SUITES RÉCURRENTES ET LIMITES

Propriété

Soit une suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction numérique continue sur un intervalle I.
Si la suite (u_n) est convergente et que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$, alors la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $x \in I$, $f(x) = x$.

Remarques

- Toute solution de l'équation $f(x) = x$ est appelée un point fixe de f.
- Toute solution de l'équation $f(x) = x$ n'est pas forcément la limite de la suite (u_n).

VI. LIMITE D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Propriété

- Si $a \leq -1$, alors la suite (a^n) n'a pas de limite.
- Si $-1 < a < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$.
- Si $a = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 1$.
- Si $a > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$.

Exemple d'application

Déterminons dans chacun des cas suivants, la limite de la suite (u_n) définie par :

a) $u_n = 2^n$.

b) $u_n = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

a) On a : $2 > 1$, donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

b) On a : $-1 < -\dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$, donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

VII. LIMITES ET COMPARAISON

Propriété

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels définies sur $\mathbb{N}$.

Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple d'application

Déterminons la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \cos(n) - 2n$.
On a : $-1 \leq \cos(n) \leq 1$
$-1 - 2n \leq \cos(n) - 2n \leq 1 - 2n$.
Pour tout entier naturel n, $u_n \leq 1 - 2n$. On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-2n) = -\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Propriété (Théorème des gendarmes)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) des suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = L$ ($L \in \mathbb{R}$), alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L$.

Exemple d'application

Déterminons : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\cos(n)}{n} + 3$. On a : $-1 \leq \cos(n) \leq 1$, ainsi, $-\dfrac{1}{n} + 3 \leq \dfrac{\cos(n)}{n} + 3 \leq \dfrac{1}{n} + 3$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{n} + 3\right) = 3$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 3$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{\cos(n)}{n} + 3\right) = 3$.

Propriété

- Si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{\alpha} = 0$.
- Si $\alpha = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{\alpha} = 1$.
- Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{\alpha} = +\infty$.

VIII. CROISSANCE COMPARÉE DES SUITES : a^{α} ; n^{α} et $\ln n$.

Propriété

- Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{n^{\alpha}} = 0$.
- Si $a > 1$ et si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^{\alpha}}{a^{n}} = 0$.
- Si $0 < a < 1$ et $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^{\alpha}}{a^{n}} = +\infty$.

Exemple d'application

Étudions les limites éventuelles de la suite (u_n).

a) $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$; b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{3^n}$; c) $u_n = \dfrac{1}{n\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}$.

On a :

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{n^2} = 0$. b) $\dfrac{\sqrt{n}}{3^n} = \dfrac{n^{\frac{1}{2}}}{3^n}$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{3^n} = 0$. c) $\dfrac{1}{n\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n} = \dfrac{n^{-1}}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}$ et $0 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$,

donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n} = +\infty$.

QUESTION 1

Comment démontrer qu'une suite est minorée, majorée ou bornée?

Méthode

Pour démontrer qu'une suite est minorée par m, majorée par M ou bornée, on peut procéder comme suit :

- Étudier le signe d'une différence de $u_n - m$ ou $u_n - M$.
- Étudier la fonction f lorsque la suite est du type : $u_n = f(n)$.
- Faire un raisonnement par récurrence.

Exercice

Soit (u_n) la suite de nombres réels définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{-2n}{n+1}$.

Démontre que la suite (u_n) est minorée par -2.

Démontre que la suite (u_n) est bornée.

Solution commentée

- Démontrons que la suite (u_n) est minorée par -2.

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n + 2 = \dfrac{-2n}{n+1} + 2 = \dfrac{2}{n+1}$.

$\forall\ n \in \mathbb{N}, \dfrac{2}{n+1} > 0$, donc $u_n > -2$

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n > -2$, la suite est minorée par −2.

- Démontrons que la suite (u_n) est bornée.

$\forall\ n \in \mathbb{N}, -2n < 0$ et $n + 1 > 0$, donc

$\forall\ n \in \mathbb{N}, -2n < 0$, d'où $u_n < 0$.

La suite (u_n) est majorée par 0.

La suite (u_n) est à la fois minorée et majorée donc elle est bornée.

Exercice non corrigé

Démontre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général : $v_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$ est bornée.

QUESTION 2

Comment étudier le sens de variation d'une suite numérique (u_n) ?

Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

1ère méthode : on compare u_{n+1} et u_n, ce qui revient à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

2ème méthode : lorsque la suite est à termes positifs, on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 ;

3ème méthode : lorsque la suite est définie par une formule explicite de type $u_n = f(n)$, on étudie le sens de variation de la fonction f. La suite (u) et la fonction f ont le même sens de variation.

Lorsque la suite est définie par une formule de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, on utilise un raisonnement par récurrence et éventuellement le sens de variation de la fonction f.

Exercice

Étudie le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par : $u_n = 2 + \frac{1}{n}$.

Solution commentée

1ère méthode : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = 2 + \frac{1}{n+1} - 2 - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)}$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n < 0$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

2ème méthode : la suite (u_n) est à termes strictement positifs.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2+\frac{1}{n+1}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{\frac{2n+3}{n+1}}{\frac{2n+1}{n}} = \frac{n(2n+3)}{(n+1)(2n+1)} = \frac{2n^2+3n}{2n^2+3n+1} = 1 - \frac{1}{2n^2+3n+1}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

3ème méthode : la suite (u_n) est définie par une formule explicite du type $u_n = f(n)$, avec $f(n) = 2 + \frac{1}{n}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) < 0$.

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par suite, f est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

D'où, la suite (u_n) est strictement décroissante .

Exercice non corrigé

Étudie le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

QUESTION 3

Comment démontrer qu'une suite numérique est convergente? Et comment calculer sa limite ?

Méthode

Pour démontrer qu'une suite numérique est convergente, on peut :

- Calculer la limite d'une fonction si $u_n = f(n)$.
- Utiliser une représentation graphique pour conjecturer le résultat et ensuite le démontrer.
- Utiliser les propriétés de convergence (suite croissante et majorée ou décroissante et minorée et résoudre l'équation $f(x) = x$).

Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$.

1. Démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leq 4$.
2. Détermine le sens de variation de la suite (u_n).
3. Déduis -en que la suite (u_n) est convergente.
4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 8$.

a) Démontre que (v_n) est une suite géométrique.

b) Exprime (v_n) puis (u_n) en fonction de n.

c) Déduis-en la limite de la suite (v_n), puis de la suite (u_n).

Solution commentée

1. Démontrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 4$.

On a : $u_0 = 2$ donc $u_0 < 4$; la relation est vraie pour $n = 0$.
Supposons que pour un entier naturel k, $u_k \leq 4$ et montrons que $u_{k+1} \leq 4$.
$u_k \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{2}u_k \leq \frac{1}{2}\times 4 \Rightarrow 2+\frac{1}{2}u_k \leq 2+2 \Rightarrow 2+\frac{1}{2}u_k \leq 4$ or $u_{k+1} = 2+\frac{1}{2}u_k$, donc $u_{k+1} \leq 4$.

En conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 4$.
Par conséquent la suite (u_n) est majorée par 4.

2. Démontrons que la suite (u_n) est croissante.
$u_{n+1} - u_n = 2 + \frac{1}{2}u_n - u_n = 2 - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(4-u_n)$.
Or d'après la question précédente $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 4$.
Donc $-u_n \geq -4 \Rightarrow 4-u_n \geq 0$, par suite, $\frac{1}{2}(4-u_n) \geq 0$.
$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(4-u_n) \geq 0$, d'où la suite (u_n) est croissante.

3. La suite (u_n) est une suite croissante et majorée par 4, donc elle est convergente.

4. a) Démontrons que (v_n) est une suite géométrique.
$v_{n+1} = u_{n+1} - 8 = \frac{1}{2}u_n + 4 - 8 = \frac{1}{2}u_n - 4 = \frac{1}{2}(u_n - 8) = \frac{1}{2}v_n$, donc $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme v_0 tel que $v_0 = u_0 - 8 = -6$

b) Exprimons v_n puis u_n en fonction de n.
(v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme v_0 tel que $v_0 = -6$, donc $v_n = v_0 q^n$.
On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -6\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{-6}{2^n}$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + 8 = \frac{-6}{2^n} + 8$.

c) Déduisons la limite de la suite (v_n), puis de la suite (u_n).
On a : $0 < \frac{1}{2} < 1$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.
On en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 8$.

Exercice non corrigé

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n+1}{u_n+3} \end{cases}$

1. Démontre que pour tout nombre entier naturel n, $u_n > 0$.
2. a) Calcule u_1.
   b) Démontre par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
3. Étudie la convergence de la suite (u_n).

Exercices de fixation

Représenter les termes d'une suite sur l'axe (OI)

1 Soit la suite numérique u définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$

Représente les 5 premiers termes de la suite u sur l'axe (OI).

2 Représente graphiquement les 4 premiers termes de chacune des suites numériques suivantes sur l'axe (OI)

a) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -u_n + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} v_0 = -2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + 2 \end{cases}$

Démontrer par récurrence

3 Soit la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n \end{cases}$.

Démontre par récurrence sur n que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = 5 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

4 Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 + \frac{u_n}{2} \end{cases}$.

Démontre par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $2 \leq u_n < 4$.

5 Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} \end{cases}$.

Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 2$.

6 Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 2U_n - 3 \end{cases}$.

Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 3 - 2^n$.

Connaître la définition d'une suite minorée, majorée ou bornée.

7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = \frac{2n-3}{5n-1}$.

Montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $-\frac{1}{4}$.

8 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$.

Démontre par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2.

9 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite numérique définie par $u_n = \frac{3n}{n+1}$.

Démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $u_n = 2^n - 3^n$.

Démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

Étudier le sens de variation d'une suite numérique

11 Dans chacun des cas suivants, étudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a) $u_n = \frac{n+2}{2n+1}$ b) $u_n = \frac{n^2-4}{n^2+1}$ c) $u_n = \frac{n^2+2n+3}{n+1}$

d) $u_n = \frac{n!}{n^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

12 Pour chacune des suites $(u_n)_{n\geq 2}$, détermine la fonction associée f et étudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.

a) $u_n = \frac{ln(n)}{n^2}$ b) $u_n = \frac{e^n}{n+3}$ c) $u_n = \frac{3^n}{n}$.

13

a) Démontre que les suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $u_n = -\frac{1}{n}$ et $v_n = -\frac{1}{n^2}$ sont croissantes.

b) Étudie le sens de variation de la suite de terme général $u_n \times v_n$.

Connaître la définition d'une suite convergente

14 À chacune des affirmations suivantes, repons dans ton cahier par V, si l'affirmation est vraie ou par F si l' affirmation est fausse.

La suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite :

N°	Affirmations
1	Si $n > 1$, alors $0 < u_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$
2	$\forall\, n \in \mathbb{N}, \lvert u_n \rvert \leq e^{-n}$
3	$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n < \frac{1}{n}$
4	$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \lvert u_n \rvert \leq \frac{ln(n)}{n}$

15 Dans chacun des cas suivants, étudie la convergence de la suite $(u_n)n\in\mathbb{N}^*$ de terme général u_n.

a) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^4+n^3}}{(n+1)^2}$; b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}-5}{\sqrt{n}+3}$;

c) $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$; d) $u_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$.

16 Calcule la limite de chacune des suites suivantes :

$u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{ln(n)}$; $v_n = n^2 - 3^{n+1}$; $w_n = \dfrac{n \times 2^n}{3^n}$.

Connaître les propriétés de comparaison

17 Soit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $u_n = -n + sin(n)$ et $v_n = (-1)^n + n^2$.
Calcule la limite de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

18 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \dfrac{2-(-1)^n}{n\sqrt{n}+1}$.

1. Démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leq \dfrac{3}{n\sqrt{n}}$.
2. Déduis-en la limite de la suite (u_n).

Reconnaître une suite arithmétique ou une suite géométrique

19 Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$

Détermine la nature de la suite u.

20 Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n \end{cases}$

Quelle est la nature de la suite u ?

21 La suite (U_n), avec $n \geq 1$, est arithmétique. Détermine le premier terme U_1 et la raison r sachant que : $U_7 + U_8 + U_9 = 12$ et $U_4 + U_8 = -4$.

22 Calcule la somme des termes d'une suite arithmétique : $S_{15} = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots = U_{15}$, sachant que : $U_4 = 8$ et $U_7 = -1$.

23 La suite (U_n) étant arithmétique, détermine l'entier naturel n tels que : $U_n = -28$; $U_0 = 5$ et $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n = -138$.

24 La suite (U_n) étant une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, détermine l'entier naturel n tel que : $U_0 = 4$ et $U_n = \dfrac{1}{4}$.

25 Calcule la somme : $S_{10} = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{10}$ sachant que $U_n = \dfrac{2^n}{3}$ pour tout entier naturel n.

26 Calcule les sommes suivantes :

$S = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \ldots + \dfrac{1}{59049}$ et

$R = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 16384$.

27 Détermine trois termes consécutifs d'une suite arithmétique dont la somme des termes est 51 et le produit est 4301.

Exercices de renforcement / Approfondissement

28 u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 désignent cinq termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q.

a) Montre que $u_1 u_5 = u_3^{\,2}$

b) Détermine les termes sachant que :

$u_1 u_5 = 25$; $u_2 + u_3 + u_4 = \dfrac{35}{2}$ et $u_3 > 0$.

29 Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$.

1. Quelle est la nature de la suite u ?
2. Calcule u_1 et u_2
3. Étudie le sens de variation de la suite u
4. Exprime u_n en fonction de n.
5. Calcule en fonction de n :

   a) $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

   b) $S' = u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n$

30 Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_1 = 3 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$

1. Quelle est la nature de la suite u ?
2. Calcule u_2 et u_3.
3. Étudie le sens de variation de la suite u.
4. Exprime u_n en fonction de n.
5. Calcule en fonction de n : S = $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$
6. Soit la suite v définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln u_n$

   a) Démontre que la suite v est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b) Calcule : P = $u_1 \times u_2 \times u_3 \times \ldots \times u_n$.

31 Soit la suite définie $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{3}{5}U_n + 1 \end{cases}$

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O,I,J), représenter sur l'axe des abscisses les termes U_0 ; U_1 ; U_2 et U_3 de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (*Unité graphique 2 cm*).
2. a) Démontre par récurrence que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{5}{2}$.
   b) Démontre que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $V_n = U_n - \frac{5}{2}$
   a) Démontre que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprime V_n puis U_n en fonction de n.
   c) Détermine la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

32 U est la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{2}{3} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{n+2}{2\sqrt{2}} (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}.$$

1. Calcule U_1 et U_2.
2. V est la suite définie par : pour tout entier naturel n, $V_n = U_n\sqrt{2} - n$. Démontre que la suite V est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_0.
3. Calcule V_n, puis U_n en fonction de n. Étudie la convergence de la suite U.
4. $S_{0,n} = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$. Exprime $S_{0,n}$ en fonction de n. Étudie $\lim_{n\to+\infty} S_{0,n}$.

33 On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

a) Calcule S_1, S_2, S_3, S_4.

b) Exprime S_{n+1} en fonction de S_n.

c) Démontre par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

34 On considère la suite (U_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$,

par : $\begin{cases} U_{n+2} = 5U_{n+1} - 6U_n \\ U_0 = 1 \\ U_1 = 2 \end{cases}$

Démontre que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n = 2^n$.

35 x , y et z sont, dans cet ordre, les trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Calcule ces trois nombres, sachant que leur somme est 9 et la somme de leur carré est 59.

36 On considère la suite (U_n) définie.

par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{2}{1+U_n} ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Démontre par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$,
   on a : $0 \leq U_n \leq 3$.
2. On considère la suite (V_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$.
   Démontre que la suite (V_n) est géométrique.
3. Exprime V_n en fonction de n. Déduis-en la limite de la suite (V_n).
4. Déduis des questions précédentes, la limite de la suite (U_n).

37 Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 9e \\ U_{n+1} = 3\sqrt{U_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On pose $V_n = \ln\left(\frac{U_n}{9}\right)$ pour tout entier naturel n.

1. Démontre que la suite V_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_0.
2. Exprime V_n en fonction de n. Déduis-en la limite de la suite (V_n).
3. Déduis des questions précédentes, la limite de la suite (U_n).

38 Soit (U_n) telle que $U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{-4}{4+U_n}$.

Soit (V_n) telle que, pour tout entier naturel n, $V_n = \frac{1}{2+U_n}$.

1. Démontre que la suite (V_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.
2. Exprime V_n en fonction de n et déduis-en que pour tout entier naturel n, $U_n = \frac{2}{n+1} - 2$.
3. Calcule la limite de la suite (U_n) et celle de la suite (V_n).

39 Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J).

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie

par : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3 \end{cases}$

1. Construis les 5 premiers termes de cette suite sur l'axe des abscisses.

2. a) Démontre que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $U_{n+1}-U_n=\frac{1}{2}(U_n-U_{n-1})$.

   b) Déduis-en que : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $U_{n+1}-U_n=-5\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

   c) Quel est le sens de variation de la suite (U_n) ?

3. a) Démontre que : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $U_n+6=\frac{1}{2}(U_{n-1}+6)$.

   b) Déduis-en que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $U_n+6=\frac{1}{2}(U_0+6)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

   c) Calcule la limite de la suite (U_n).

40 On considère les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies

par : $\begin{cases} U_0=\frac{1}{3} \\ U_{n+1}=\frac{3}{2}(U_n)^2 \text{ et } V_n=\ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) \end{cases}$

ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Calcule V_0.
2. Démontre que (V_n) est une suite géométrique de raison 2.
3. Exprime V_n en fonction de n.
4. Calcule la limite de V_n.
5. Exprime U_n en fonction de V_n et déduis-en la limite de (U_n).
6. Pour tout entier naturel n, non nul on pose :

   $S_n=V_0+V_1+V_2+\dots\dots\dots\dots+V_{n-1}$ et

   $T_n=U_0\times U_1\times U_2\times\dots\dots\times U_{n-1}$.

   a) Démontre que : $S_n=(1-2^n)\ln 2$.

   b) Justifie que : $T_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$.

   c) Exprime T_n en fonction de n

41 On se propose d'étudier la suite (U_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par :

$\begin{cases} U_0=1 \\ \forall\in N, U_{n+1}=U_n e^{-U_n} \end{cases}$, puis la convergence de la suite (S_n) définie par $S_n=\sum_{p=0}^{n}U_p$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. a) Montrer pour pour tout entier n, U_n est strictement positif.

   b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

   c) En déduire qu'elle converge et trouver sa limite.

2. Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N} U_{n+1}=e^{-S_n}$ et en déduire que S_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

42 Démontre que pour tout entier $n\geq 1$,

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

43 Démontre que pour tout entier $n\geq 1$,

$$1\times 2\times 3+\dots+n\times(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

44 Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $3^{2n}-1$ est un multiple de 8.

45 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$ et $u_0=2$.

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n-3$.

1. Démontre que (v_n) est une suite géométrique.
2. a) Détermine la limite de la suite (v_n).

   b) Détermine la limite de la suite (u_n).

46 Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $u_0=-5$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+\frac{3}{2}$.

1. Exprime u_n en fonction de n.
2. Représente sur la droite (OI), les cinq premiers termes de la suites $(u_n)_{n\in N^*}$.
3. Calcule $u_0+u_1+u_2+\dots+u_{20}$.

47 Démontre que toute suite (u_n) vérifiant la relation $u_{n+1}+u_{n-1}=2u_n$ pour $n\geq 1$, est une suite arithmétique.

48 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0=2$, $v_0=8$ et, telles que : $u_{n+1}=\frac{2u_n+v_n}{3}$

et $v_{n+1}=\frac{u_n+3v_n}{4}$.

1. Calcule u_1 et v_1.
2. Soit la suite (d_n) définie sur $\mathbb{N}$, par : $d_n=v_n-u_n$.

   a) Démontre que (d_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme d_0 et la raison.

   b) Déduis une expression de d_n en fonction de n,

   c) Démontre que, pour tout élément $n\in\mathbb{N}$, $d_n>0$.

   d) Calcule la limite de la suite (d_n).

3. a) Démontre que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$,

   $$u_{n+1}-u_n=\frac{d_n}{3} \text{ et } v_{n+1}-v_n=-\frac{d_n}{4}.$$

b) Déduis-en les variations des suites (u_n) et (v_n).

c) Démontre que, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $u_0 < u_n < v_n < v_0$.

d) Déduis des questions 3.a) et 3.b) que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

4. a) Déduis de la question 3.a) pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.

b) Déduis-en la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (v_n).

49 On considère la suite (u_n) à termes positifs définie.

par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 3}{u_n} \end{cases}$.

1. f est la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$f(x) = \dfrac{4x-3}{x}$.

(C) désigne la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

a) Étudie les variations de f, puis dresse son tableau de variation.

b) Trace (C) et la droite (D) d'équation $y = x$.

c) Utilise (C) et (D) pour construire u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe (OI).

2. a) Démontre que: $f([2;3]) \subset [2;3]$

b) Déduis, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n : $2 \leq u_n < 3$.

c) Démontre que la suite (u_n) est strictement croissante.

d) Déduis-en que la suite (u_n) converge.

3. On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 1}$.

a) Démontre que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b) Déduis-en la limite de la suite (v_n).

c) Détermine la limite de la suite (u_n).

50 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calcule u_1 et u_2.

2. a) Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.

b) Déduis-en la limite de la suite (u_n).

3. Démontre que la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - n + 1$.

a) Démontre que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b) Déduis-en que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

51 Pendant le cours de génétique, le professeur de SVT explique à ses élèves de Terminale D l'expérience qui permet d'obtenir une race pure de souris.

On dispose d'une population P_0 de souris noires ayant les gènes de couleur noire et de couleur blanche.

On la laisse se reproduire. On obtient une population P_1 de N petits avec la proportion $u_0 = \dfrac{n}{N}$ de souris noires.

On retire les souris blanches et on laisse se reproduire les souris noires de la population P_1.

On note u_n la proportion de souris noires après la n-ième reproduction.

On admet que la suite (u_n) est définie par : $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{3-u_n}$.

1. Calcule u_1 pour $u_0 = 0,5$.
2. On pose : $v_n = u_n - 1$.

   Démontre que la suite $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Démontre que la suite (u_n) converge vers 1.
4. Interprète ce résultat du point de vue génétique.

52 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1. Démontre que (u_n) est à termes positifs et majoré par 5.
2. Étudie le sens de variation, puis la convergence de (u_n).
3. a) Démontre que pour tout entier naturel n, on a :

$|u_{n+1} - 3| \leq \dfrac{1}{3}|u_n - 3|$ et $|u_n - 3| \leq 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

b) Déduis-en : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Situations complexes

53 Monsieur Koudou, fondateur d'un établissement secondaire a recruté des enseignants. Il leur propose un salaire annuel de 750 000 F CFA.

Après quelques mois de travail, une grève des enseignants, pour la revalorisation de leur salaire, amène le fondateur à faire deux propositions de contrat, au choix, afin de relever les salaires.

Le premier contrat stipule que les enseignants auront chaque année une augmentation de 4% du salaire de l'année précédente.

Le deuxième contrat consiste à faire chaque année une augmentation forfaitaire de 30 000 F CFA.

Monsieur Yao, professeur d'anglais, veut s'engager pour 9 ans mais il hésite quant au choix du contrat. Il te sollicite.

Détermine, en utilisant tes connaissances mathématiques, le contrat le plus avantageux pour Monsieur Yao.

54 Dans le cadre de la lutte contre la COVID-19, des chercheurs d'un pays ont modélisé l'évolution de la pandémie par une fonction f définie sur $\mathbb{N}$ par :

$f(t) = 120\,t + 1$.

$f(0)$ désigne le nombre de cas de contamination déclaré le jour de l'annonce de la découverte de la maladie dans le pays. Pour $t \neq 0$, $f(t)$ désigne le nombre de nouveau cas de contamination au $t^{\text{ème}}$ jour après la déclaration du premier cas.

À l'issue d'un point de presse, le Ministre de la santé, estime que le gouvernement instaurera un couvre-feux, si le nombre total de cas de contamination dans le pays dépasse 10 000 personnes.

Ayant écouté cette information, un de tes camarades de classe estime que si cette tendance se poursuit selon la modélisation décrite par les chercheurs, le couvre-feu interviendra 10 jours après la déclaration du premier cas de COVID-19 dans ce pays.

Dans le cas de cette modélisation et à l'aide d'une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques, détermine le nombre de jours à partir duquel le couvre-feux interviendra, et dis si la déclaration de ton camarade de classe est juste ou non.

55 Dans le cadre de la lutte contre la pauvreté, une institution financière a relevé les taux d'inflation annuels dans un pays pendant huit années consécutifs (de janvier 2014 à janvier 2022).

Les résultats de l'enquête sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Années	2014-2017	2017-2019	2019-2020	2020-2021	2021-2022
Taux d'inflation annuel	6%	7%	7,5%	8%	10%

L'institution financière estime que le coût de la vie dans un pays est élevé lorsque le taux d'inflation globale pendant huit ans est supérieur à 60%.

Deux de tes amis n'ont pas la même interprétation des résultats de ce tableau. En effet, Coulibaly estime que le coût de la vie est élevé dans ce pays tandis que Yao dit le contraire. Il te sollicite pour les départager.

À l'aide d'un raisonnement basé sur tes connaissances mathématiques, départage tes deux amis.

10 CALCUL INTÉGRAL

Commentaire de la Leçon

L'histoire du calcul intégral remonte à l'Antiquité avec les problèmes d'ordre géométrique que se posaient les Grecs : calculs d'aires (ou quadratures), de volumes, de longueurs, de centres de gravité ... Les précurseurs grecs du calcul intégral peuvent se résumer à Eudoxe et Archimède.

Mais il a fallu attendre jusqu'à la seconde moitié du XVIIe siècle pour que le concept d'intégration connaisse des progrès décisifs, notamment grâce aux travaux de Newton et de Leibniz.

L'intégrale est une notion nouvelle en classe de Terminale, où elle est introduite à l'aide de primitives d'une fonction. On y aborde ses propriétés, ainsi que son application au calcul d'aires. Lors d'une évaluation, si le calcul d'une intégrale utilise une intégration par parties, l'énoncé devra l'indiquer.

A l'occasion d'un calcul d'aire, l'unité attendue doit être précisée dans l'énoncé. On pourra calculer sur des exemples, une valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles. Toutefois, cette méthode ne fera pas l'objet d'évaluation aussi bien en classe qu'au baccalauréat. L'étude des intégrales sera approfondie dans l'enseignement supérieur avec les notions d'intégrales indéfinies, impropres, multiples, curvilignes, de surface... Hormis ses applications dans la résolution de problèmes géométriques, les intégrales sont aussi utilisées en probabilité, en physique et dans les domaines tels que la biologie ou l'économie.

Habiletés et Contenus

- **Connaître** la définition de l'intégrale d'une fonction continue, la définition de la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle, les propriétés de l'intégrale : linéarité ;positivité de l'intégrale ; relation de Chasles ; inégalité et intégrale ; inégalité de la moyenne (les 2 formes) ; la technique de l'intégration par parties ; la technique du changement de variable affine.
- **Noter** une intégrale
- **Calculer** une intégrale en utilisant : les primitives des fonctions usuelles ; la relation de Chasles ; une intégration par parties ; un changement de variable affine ; une fonction du type $u' \times (v' o u)$; une aire ; la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle ; une intégrale en utilisant la parité ou la périodicité d'une fonction.
- **Déterminer** le signe d'une intégrale ; un encadrement d'une intégrale.
- **Interpréter** graphiquement une intégrale.
- **Étudier** les variations des fonctions du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$.
- **Représenter** une allure d'une fonction du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$.
- **Traiter une situation** faisant appel au calcul intégral.

Situation d'Apprentissage

Au cours d'un exposé en Histoire-Géographie sur les infrastructures routières réalisées en Chine, les élèves de la promotion Terminale d'un établissement secondaire apprennent que le pont de Zhijingh, à Hubei, est un pont en arc qui a été construit en 2009. Afin de le construire, les ingénieurs ont été amenés à étudier la résistance du vent.

Pour cela, ils ont calculé l'aire de la surface latérale grisée de la figure ci-dessous représentant un schéma de ce pont. Il se trouve que dans les calculs, ils ont utilisé l'expression : $\int_{-L}^{L}\left[k - f(t)\right]dt$, où L, k et $f(t)$ sont donnés.

Les élèves de la promotion Terminale fascinés par ces informations, cherchent à comprendre cette expression.

Pour cela, ils décident de faire des recherches sur le calcul d'aire.

Activité 1 Définition de l'intégrale

f est une fonction continue sur un intervalle I, a et b sont deux éléments de I.
On considère deux primitives F et G de f sur I.

1. Sachant qu'il existe un nombre réel c tel que : $\forall x \in I$, $G(x) = F(x) + c$, justifie que : $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$.
2. Le nombre réel $F(b) - F(a)$ dépend-t-il de la primitive de f choisie ? Pourquoi ?

Récapitulons

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
a et b sont deux éléments de I et F une primitive de f sur I.

- Le nombre réel $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive F choisie.
- On appelle intégrale de a à b de la fonction f le nombre réel $F(b) - F(a)$.

On note : $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b$

$\int_a^b f(x)dx$ se lit « somme (ou intégrale) de a à b de $f(x)dx$ ».

$\left[F(x)\right]_a^b$ se lit : « $F(x)$ pris entre a et b ».

a et b sont les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

Exercice de fixation

1

1. Recopie et coche les bonnes réponses dans chacun des cas suivants :
Soient F et G deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I. Pour tous a et b de I, on a : $\int_a^b f(x)\,dx =$

☐ $F(b) - F(a)$; ☐ $G(a) - F(b)$;
☐ $G(b) - G(a)$; ☐ $[F(t)]_a^b$;
☐ $[G(t)]_b^a$.

2. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et x_0 un élément de I.
Justifie que la fonction F définie sur I par : $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0.
3. Calcule les intégrales suivantes :
a) $\int_2^5 (2t-1)dt$; b) $\int_3^1 \frac{1}{t^2}dt$;
c) $\int_0^1 t^2 dt$; d) $\int_2^1 \frac{dt}{t}$.

Activité 2 Propriété de linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. a et b sont deux éléments de I, α et β deux nombres réels. On désigne par F et G des primitives sur I respectivement de f et de g.

1. En utilisant les propriétés de linéarité des primitives, complète :
Une primitive sur I de la fonction $\alpha f + \beta g$ est la fonction ....
2. Déduis de la question 1 que : $\int_a^b\left[\alpha f(t)+\beta g(t)\right]dt=\alpha\int_a^b f(t)dt+\beta\int_a^b g(t)dt$.

Récapitulons

f et g étant deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux éléments de I, α et β deux nombres réels, on a : $\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$.

Exercice de fixation

2

1. Pour chacune des égalités incomplètes ci-dessous, quatres réponses sont proposées et une seule est juste. Recopie et coche la réponse juste.

a) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux nombres réels de I. On a :

$\int_a^b (f(t) - 2g(t))dt = ...$

□ $2\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$;

□ $2\int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt$;

□ $(2 - \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t))dt$;

□ $\int_a^b f(t)dt - 2\int_a^b g(t)dt$.

b) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux nombres réels de I, α et β deux nombres réels.

On a : $\int_a^b (\alpha f(t) - \beta g(t))dt = ...$

□ $\beta \int_a^b (f(t)dt + \alpha g(t))dt$;

□ $(\alpha - \beta)\left(\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt\right)$;

□ $(\alpha + \beta)\left(\int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt\right)$;

□ $\alpha \int_a^b f(t)dt - \beta \int_a^b g(t)dt$.

2. Calcule les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin x)dx$; b) $\int_0^2 (7t + 5t^2)dt$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$.

Activité 3 Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. a,b et c sont trois éléments de I et F une primitive de f sur I.

1. En utilisant la définition de l'intégrale, recopie et complète chacune des égalités suivantes :
 a) $\int_a^c f(t)dt = F(...) - F(...)$ b) $\int_c^b f(t)dt = F(...) - F(...)$

2. Déduis-en que : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

Récapitulons

f étant une fonction continue sur un intervalle I ; a,b et c trois éléments de I, on a :

$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

Exercice de fixation

3

1. Calcule l'intégrale : $\int_{-2}^3 2|t+1|dt$.

2. Calcule l'intégrale : $\int_{-2}^3 2|x-1|dx$.

Activité 4 Intégrale et inégalités

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

1. Soit F une primitive de f sur $[a\,;\,b]$. On suppose que : $f \geq 0$ sur $[a\,;\,b]$.
   a) Justifie que F est croissante sur $[a\,;\,b]$.
   b) Compare F(a) et F(b).
   c) Déduis-en que : $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
2. On suppose que : $f \leq g$ sur $[a\,;\,b]$.
   a) En utilisant ce que précède, justifie que : $\int_a^b (g-f)(x)\,dx \geq 0$.
   b) Déduis-en que : $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Récapitulons

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

- Si $f \geq 0$ sur $[a\,;\,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
- Si $f \leq g$ sur $[a\,;\,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Exercice de fixation

4

1) On admet que pour tout nombre réel x, tel que $x \geq 1$, $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Déduis-en que : $0 < \ln 2 \leq 2\sqrt{2} - 2$.

2) Sans calcul, justifie que :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \geq 0$. b) $\int_{-2}^{-1} x^3\,dx \leq 0$.

3) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Activité 5 Inégalités de la moyenne

f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$; m et M sont deux nombres réels.

1. On suppose que : $\forall\, t \in [a\,;\,b]$, $m \leq f(t) \leq$ M. Justifie que : $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$.
2. On suppose que : $\forall\, t \in [a\,;\,b]$, $|f(t)| \leq$ M. Déduis de la question précédente que : $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M(b-a)$.

Récapitulons

f est une fonction continue sur un intervalle [a;b]; m et M sont deux nombres réels.

- Si pour tout nombre réel t élément de l'intervalle $[a\,;\,b]$, $m \leq f(t) \leq$ M, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$.
- Si pour tout nombre réel t élément de l'intervalle $[a\,;\,b]$, $|f(t)| \leq$ M, alors : $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M(b-a)$.

Exercice de fixation

5

1. Sans calculer l'intégrale, justifie que : $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx\right| \leq 2$. **2.** Démontre que : $e(e-1) \leq \int_e^{e^2} \ln^2 x\,dx \leq 4e(e-1)$.

Activité 6 : Valeur moyenne d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$ par : $f(x)=\frac{2}{x^2}$.

Calcule le nombre réel μ tel que : $\mu=\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\times\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}f(x)\,dx$.

Récapitulons

- Le nombre réel $\mu=\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\times\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{2}{x^2}$ est appelé valeur moyenne de la fonction : $x\to\frac{2}{x^2}$ sur $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$
- Plus généralement, f étant une fonction continue sur un intervalle [a;b] (a<b), on appelle valeur moyenne de f sur [a;b], le nombre réel µ tel que : $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Exercice de fixation

6 Dans chaque cas, détermine la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I considéré.

1. f est telle que : $f(x) = x^2$; I = [0 ; 1].
2. f est telle que : $f(x) = e^2$; I = [−1 ; 1].
3. f est telle que : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; I = [1 ; 4].

Activité 7 Technique de l'intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$.

On suppose que leurs dérivées respectives u' et v' sont continues sur $[a;b]$.

Sachant que pour tout élément t de $[a;b]$, $(uv)'(t)=u(t)v'(t)+u'(t)v(t)$, Justifie que :
$\int_a^b u(t)v'(t)\,dt=\left[u(t)v(t)\right]_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)\,dt$.

Récapitulons

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ telles que leurs dérivées respectives u' et v' soient continues sur $[a;b]$.

On a : $\int_a^b u(t)v'(t)\,dt=\left[u(t)v(t)\right]_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)\,dt$.

Exercice de fixation

7

1. À l'aide d'une intégration par parties, calcule $\int_0^1 x\sqrt{2x+1}\,dx$.
2. Calcule l'intégrale : $\int_1^e x\ln x\,dx$.

Activité 8 Technique du changement de variable affine

f est une fonction continue sur un intervalle I et $t \mapsto \alpha t + \beta$ une fonction affine telle que : $\alpha \neq 0$.

a et b sont deux nombres réels tels que : $\forall\, t \in [a;b]$, $\alpha t + \beta \in I$.

On désigne par F une primitive de f sur I.

1. Justifie que la dérivée de la fonction : $t \mapsto F(\alpha t + \beta)$ est la fonction : $t \mapsto \alpha f(\alpha t + \beta)$.
2. En utilisant ce que précède et la définition de l'intégrale, démontre que :

$$\int_a^b f(\alpha t+\beta)\,dt = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{1}{\alpha} f(u)\,du \text{ où } u = \alpha t + \beta.$$

Récapitulons

Pour calculer une intégrale de la forme $\int_a^b f(\alpha t+\beta)\,dt$, $(\alpha \neq 0)$, on peut procéder comme suit :

- Faire le changement de variable : $u = \alpha t + \beta$.

  On obtient : $du = \alpha dt$, d'où $dt = \dfrac{1}{\alpha} du$.
- Utiliser l'égalité: $\int_a^b f(\alpha t+\beta)\,dt = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \dfrac{f(u)}{\alpha}du$

Exercice de fixation

8

1. En utilisant un changement de variable, calcule : $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$.
2. En utilisant un changement de variable, calcule : $\displaystyle\int_0^2 (2x-3)^4\,dx$.

Activité 9 Intégrale d'une fonction paire ou impaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I symétrique par rapport à zéro (0) et a un élément de I.

1. En utilisant l'égalité de Chasles, complète l'égalité : $\int_{-a}^0 f(t)\,dt + \int_0^a f(t)\,dt = \dots$
2. En posant $u = -t$, justifie que : $\int_{-a}^0 f(t)\,dt = \int_0^a f(-u)\,du$
3. Déduis-en que
   - Si f est paire, alors : $\int_{-a}^0 f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt$ et $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$.
   - Si f est impaire, alors : $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 0$.

Récapitulons

f est une fonction continue sur un intervalle I centré en zéro (0) et a un élément de I.

- Si f est paire, alors : $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$ et $\int_{-a}^0 f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt$.
- Si f est impaire, alors : $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 0$.

Exercice de fixation

9 Sans calcul, détermine la valeur de chacune des intégrales suivantes :

a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^4 x dx$ b) $\int_{-2}^{2} x\sqrt{x^2+9}dx$ c) $\int_{-1}^{1} |x|dx$ (On donne : $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$).

Activité 10 : Intégrale d'une fonction périodique

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période T. a et b sont deux nombres réels.

1. Sachant que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $f(x + T) = f(x)$, démontre que : $\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$.
   (Tu pourras effectuer un changement de variable en posant : $x = t - T$.)
2. a) En utilisant la relation de Chasles, déduis de la question 1 que : $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt = \int_{\beta}^{\beta+T} f(t)dt$
   b) Que devient l'égalité précédente, lorsque : $\beta = 0$?

Récapitulons

f étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période T, a et b deux nombres réels, on a :

a) $\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$. b) $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt$.

Exercice de fixation

10 Sans calculer chacune des intégrales, justifie que :

a) $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = \int_{2\pi}^{4\pi} \sin x\, dx$;

b) $\int_0^{2\pi} \cos x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx$.

Activité 11 Fonctions du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I.
F désigne une primitive de f sur I.

On considère la fonction φ définie pour tout $x \in I$, par : $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$

1. Exprime $\varphi(x)$ en fonction de $F(x)$.
2. a) Déduis-en que φ est une primitive de f sur I, c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, $\varphi'(x) = f(x)$.
   b) Calcule $\varphi(a)$.

Récapitulons

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I.

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Exercice de fixation

11 Justifie que la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}dt$ définie sur $\mathbb{R}$ est l'unique primitive de la fonction $t \mapsto \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}$ définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule en 0.

Activité 12 Calculs d'aires

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J) tel que : OI = x cm et OJ = y cm.

1. Quelle est l'aire du rectangle de dimensions OI et OJ ?
2. Soit f_1 la fonction définie sur [0 ; 2] par $f_1(x) = x$.

On note (C_{f_1}) la courbe représentative de f_1 dans le repère (O,I,J).

a) Trace (C_{f_1}).

b) Détermine le signe de f_1 sur [0 ; 2].

c) Calcule : $\int_0^2 f_1(t)dt$.

d) Calcule l'aire de la surface délimitée par la courbe (C_{f_1}), l'axe (OI) et les axes $x = 0$ et $x = e^{-2}$.

Compare les résultats du 2c et 2d.

3. Soit f_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_2(x) = x^2 - 1$.

On note (C_{f_2}) la courbe représentative de f_2 dans le repère (O,I,J).

a) Trace (C_{f_2}).

b) Détermine le signe de f_2 sur [−1;1].

c) Calcule : $-\int_{-1}^{1} f_2(t)dt$.

4. On considère les fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=x$.

On note (C_f) et (Cg) les courbes représentatives de f et g dans le repère (O,I,J).

a) Trace (Cf) et (Cg).

b) Justifie que $f \leq g$ sur [1 ; e].

c) Calcule : $\int_1^e [g(t)-f(t)]dt$.

Récapitulons

Le plan étant muni d'un repère orthogonal (O, I, J), l'unité d'aire ($u.a$) est OI × OJ.
On démontre et nous admettons la propriété suivante :
Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
f et g sont deux fonctions continues sur $[a ; b]$, (C_f) et (C_g) leurs courbes représentatives respectives.

- Si f est positive sur $[a ; b]$, alors l'aire (en unités d'aire) de la partie du plan limitée par (C_f), l'axe des abscisses (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le nombre : $\int_a^b f(t)dt$.
- Si f est négative sur [a;b], alors l'aire (en unités d'aire) de la partie du plan limitée par (C_f), l'axe des abscisses (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le nombre : $-\int_a^b f(t)dt$
- Si $f \leq g$ sur $[a;b]$, alors l'aire (en unités d'aire) de la partie du plan limitée par (C_f), (C_g), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le nombre : $\int_a^b [g(t)-f(t)]dt$

Exercice de fixation

12

1. Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) d'unité graphique 3 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Soit f une fonction continue et positive sur [1 ; 2], telle que : $f(x) = x^2 + x - 2$.

Calcule, en cm², l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) de f, la droite (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

Soit f une fonction continue et négative sur [−2 ; 0], telle que : $f(x) = x^2 + x - 2$.

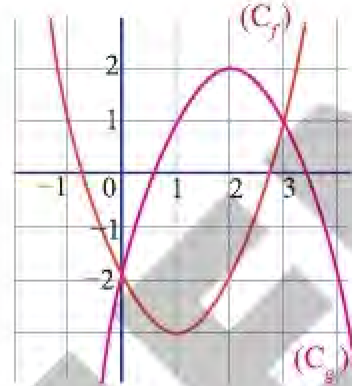
Calcule, en cm², l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) de f, la droite (OI) et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.

3. Soient f et g deux fonctions continues sur ℝ, telles que : $f(x) = x^2 - 2x - 2$ et $g(x) = -x^2 + 4x - 2$.

Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) sont représentées sur la figure ci-contre.

Pour tout x élément de [0 ; 3], $f(x) \leq g(x)$.

Calcule l'aire de la partie du plan délimitée par (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.



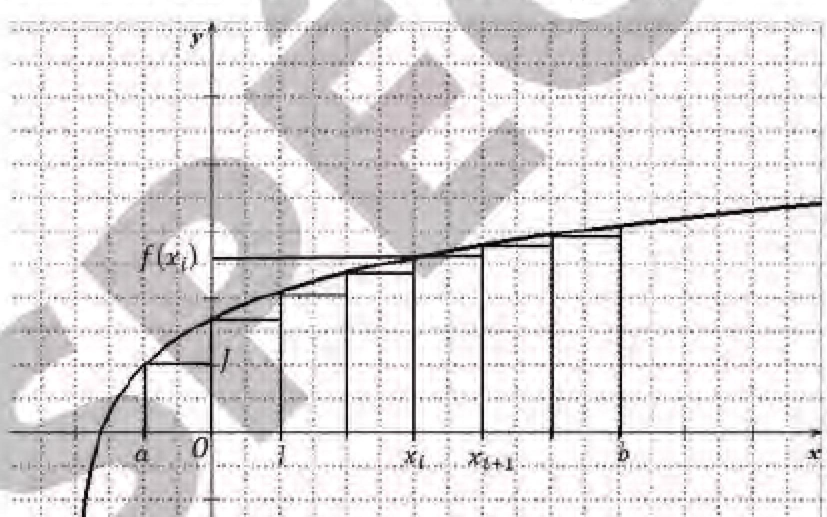
Activité 13 Calcul approché d'une intégrale par la méthode des rectangles

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ $(a<b)$. On pose : $K = \int_a^b f(x)dx$

On partage $[a;b]$ en n intervalles $(n>0)$ de même amplitude $\frac{b-a}{n}$ dont les bornes sont :

$x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{b-a}{n},\ \ldots, x_i = a + \frac{b-a}{n}i,\ \ldots, x_n = b.$

On va choisir pour tout nombre réel x de $[x_i ; x_{i+1}]$, $f(x_i)$ comme valeur de $f(x)$ (voir figure).



1. Détermine l'aire du rectangle R_i défini par les points $M(x ; y)$ du plan tels que :

   $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ et $0 \leq y \leq f(x_i)$, où $i = 0 ; 1 ; ... ; n - 1$.

2. Déduis-en que la somme des aires des rectangles R_i est u_n tel que : $u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right)$.

Récapitulons

- Le nombre u_n est une valeur approchée de l'intégrale : $K=\int_a^b f(x)dx$. La méthode utilisée pour calculer u_n est appelée méthode des rectangles.
- D'une façon analogue, en choisissant pour tout nombre réel x de $[x_i\,;\,x_{i+1}]$, $f(x_{i+1})$ comme valeur de $f(x)$, on obtient une autre valeur approchée de l'intégrale K. C'est le nombre v_n tel que : $v_n=\dfrac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\dfrac{b-a}{n}i\right)$.
- On démontre et nous admettons que :
  - ✓ si f est croissante sur $[a;b]$, alors on a : $u_n \leq \int_a^b f(x)dx \leq v_n$.
  - ✓ si f est décroissante sur $[a;b]$, alors on a : $v_n \leq \int_a^b f(x)dx \leq u_n$.
- $\dfrac{u_n+v_n}{2}$ est une valeur approchée de K à $\left|\dfrac{v_n-u_n}{2}\right|$ près.
- On démontre et nous admettons que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers l'intégrale K.
- Une autre valeur approchée de K est le nombre : $\dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f\left(a+\dfrac{b-a}{n}i\right)$.

Exercice de fixation

13

1. Pour chaque valeur de n donné, donne un encadrement et une valeur approchée de chacune des intégrales suivantes :

a) $n = 10$, $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$; b) $n = 20$, $\int_0^1 e^{-x^2}dx$; c) $n = 15$, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

2. Calcule les limites de chacune des suites de terme général S_n, ($n \in \mathbb{N}^*$) :

a) $S_n=\dfrac{1}{n}\left(1+\cos^2\dfrac{\pi}{n}+\ldots+\cos^2\dfrac{n\pi}{n}\right)$;

b) $S_n=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1^2+n^2}}+\dfrac{2}{\sqrt{2^2+n^2}}+\ldots+\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$.

Résumé de la leçon

1. NOTION D'INTÉGRALE

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I.
Le nombre réel $F(b) - F(a)$ est indépendant de toute primitive F de f sur I. *Il* est appelé intégrale de a à b de la fonction f. Ce nombre réel est noté : $\int_a^b f(t)\,dt$ ou $[F(t)]_a^b$. $\int_a^b f(t)\,dt$ est lue : « somme de a à b de $f(t)\,dt$. »
$\left[F(t)\right]_a^b$ est lue : « $F(t)$ pris entre a et b ».a et b sont les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$.

Remarques

Le nombre réel $\int_a^b f(t)\,dt$ est indépendant de la variable t d'intégration :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(x)\,dx.$$

On dit que la variable d'intégration est muette.

Exemple d'application

La fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur [4;9].

Elle admet donc des primitives sur [4;9]. On a :

$$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_4^9 = 2\sqrt{9} - 2\sqrt{4} = 2.$$

Conséquences

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I.

On a : $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ *et* $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Exemple d'application

Sachant que : $\int_4^9 \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$, déterminons $\int_9^4 \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$.

On a : $\int_9^4 \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx = -\int_4^9 \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx = -2.$

Pour s'entraîner : Exercice 1 ; 2

2. PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

A) Linéarité

Propriété

Soient f *et* g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux éléments de I. Soient α et β deux nombres réels.

On a : $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$.

Exemple d'application

Soit f et g deux foncions telles que : $\int_{-1}^2 f(x)\,dx = -7$ et $\int_{-1}^2 g(x)\,dx = 4$.

On a : $\int_{-1}^2 \left(3f(x) - \dfrac{1}{2}g(x)\right)dx = 3\int_{-1}^2 f(x)\,dx - \dfrac{1}{2}\int_{-1}^2 g(x)\,dx = 3\times(-7) - \dfrac{1}{2}\times 4 = -23.$

- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (-5\cos 2x + 4\sin 2x)\,dx = -5\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx + 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx$.

$$= -5\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + 4\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{5}{2}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\left[\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$= -\frac{5}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - 2\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -\frac{1}{2}$

- $\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2+1}dx + \int_{-2}^{1} \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int_{-2}^{1} \frac{1+x^2}{x^2+1}dx = \int_{-2}^{1} 1dx = [x]_{-2}^{1} = 1-(-2) = 3.$

Pour s'entraîner : Exercices 3 ; 4 ; 5

B) Relation de Chasles

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c des nombres réels appartenant à I.

On a : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.

Exemple d'application

Calculons : $\int_0^{\pi} |\cos x| dx$. ; On sait que : $\begin{cases} \cos x \geq 0, \text{si } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ \cos x < 0, \text{si } x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right] \end{cases}$.

On obtient : $\int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [-\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2.$

Pour s'entraîner : Exercices 6 ; 7 ; 8 ; 9

C) Intégrale et inégalités

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$.

- Si $f \geq 0$ sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
- Si $f \leq g$ sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Remarques

On peut avoir $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$ sans que la fonction f soit positive sur $[a ; b]$.

En effet, on a : $\int_0^2 (x^2-1)dx = \frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3} > 0$.

Mais, la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ ne garde pas un signe constant sur l'intervalle [0 ; 2].

Exemple d'application

- On a : $\int_{-5}^{2} \frac{7}{\sqrt{x^2+1}}dx \geq 0$, car la fonction :

  $x \mapsto \frac{7}{\sqrt{x^2+1}}$ est positive sur [-2;5].

- Sachant que : pour tout $x \in [1;3]$, $0 \leq \ln x \leq x-1$, démontrons que : $\int_1^3 \left(1-(\ln x)^2\right)dx \geq -\frac{2}{3}$.

  Soit $x \in [1;3]$.

  $0 \leq \ln x \leq x - 1 \Leftrightarrow 1 - (\ln x)^2 \geq 2x - x^2$.

  D'où : $\int_1^3 \left(1-(\ln x)^2\right)dx \geq \int_1^3 (2x - x^2)dx$

  Or $\int_1^3 (2x-x^2)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^3 = -\frac{2}{3}$.

  Donc : $\int_1^3 \left(1-(\ln x)^2\right)dx \geq -\frac{2}{3}$.

Pour s'entraîner : Exercices 10 ; 11; 12

D) Inégalités de la moyenne

Propriété

Soit f une fonction continue sur $[a\,;\,b]$.

- Si les nombres réels m et M sont, tels que : $m \leq f(t) \leq$ M pour tout t de $[a\,;\,b]$, alors $m\,(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$.
- Si $|f(t)| \leq$ M pour tout nombre t de $[a\,;\,b]$, alors $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq M(b-a)$.

Remarques

L'inégalité de la moyenne appliquée à une fonction f sur un intervalle $[a;b]$, c'est l'inégalité des accroissements finis appliquée à une primitive F de f sur [a;b].

Exemple d'application

Démontrons que : $\dfrac{\pi}{12\sqrt{3}} \leq \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{1}{\sin 2x}dx \leq \dfrac{\pi}{12\sqrt{2}}$.

$\forall x \in \left[\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{6}\right],\ \dfrac{\pi}{4} \leq 2x \leq \dfrac{\pi}{3}$.

On en déduit que : $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin 2x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

D'où $\dfrac{2}{\sqrt{3}} \leq \dfrac{1}{\sin 2x} \leq \dfrac{2}{\sqrt{2}}$.

On a alors : $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{8}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{1}{\sin 2x}dx \leq \dfrac{2}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Donc : $\dfrac{\pi}{12\sqrt{3}} \leq \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{1}{\sin 2x}dx \leq \dfrac{\pi}{12\sqrt{2}}$.

Pour s'entraîner : Exercices 13 ; 14

E) Valeur moyenne d'une fonction

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a\,;\,b]$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a\,;\,b]$ le nombre réel $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.

Exemple

Calculons la valeur moyenne µ de la fonction : $x \longmapsto e^x$ sur l'intervalle [−1;1].

On a : $\mu = \dfrac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1} e^x\,dx = \dfrac{1}{2}\left[e^x\right]_{-1}^{1} = \dfrac{e^2-1}{2e}$.

Pour s'entraîner : Exercices 15 ; 16

3. TECHNIQUE DE L'INTÉGRATION PAR PARTIES

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a\,;\,b]$ ($a \leq b$) et dont les fonctions dérivées u' et v' sont continues sur $[a\,;\,b]$.

On a : $\int_a^b u(t)\times v'(t)\,dt = [u(t)\times v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\times v(t)\,dt$.

Exemple d'application

- Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\cos x dx$

Posons : $u(x) = x - 1$; on a : $u'(x) = 1$
$v'(x) = \cos x$ $\qquad v(x) = \sin x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\cos x dx = [(x-1)\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \sin x dx = [(x-1)\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\cos x dx = [(x-1)\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 + 0 - (0+1) = \frac{\pi - 4}{2}.$$

- Calculons $\int_1^e t\ln^2 t dt$.

Posons : $u(t) = \ln^2 t$; On a : $u'(t) = \frac{2\ln t}{t}$
$v'(t) = t$ $\qquad v(t) = \frac{t^2}{2}$.

$$\int_1^e t\ln^2 t dt = \left[\frac{(t\ln t)^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e t\ln t dt.$$

En utilisant une seconde intégration par parties, calculons : $\int_1^e t\ln t dt$.

Posons : $f(t) = \ln t$; On a : $f'(t) = \frac{1}{t}$
$g'(t) = t$ $\qquad g(t) = \frac{t^2}{2}$

$$\int_1^e t\ln t dt = \left[\frac{t^2\ln t}{2}\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e t dt = \left[\frac{t^2\ln t}{2}\right]_1^e - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^e = \left[\frac{t^2\ln t}{2} - \frac{t^2}{4}\right]_1^e.$$

$$\text{Donc } \int_1^e t\ln^2 t dt = \left[\frac{(t\ln t)^2}{2} - \frac{t^2\ln t}{2} + \frac{t^2}{4}\right]_1^e = \left[\frac{2(t\ln t)^2 - 2t^2\ln t + t^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2-1}{4}.$$

Pour s'entraîner : Exercices 17 ;18 ;19 ; 20

4. TECHNIQUE DU CHANGEMENT DE VARIABLE AFFINE

Point méthode

Pour calculer une intégrale de la forme $\int_a^b f(\alpha t + \beta)dt \, (\alpha \neq 0)$, on peut procéder comme suit :

- faire le changement de variable : $u = \alpha t + \beta$;
- déterminer dt en fonction de du $dt = \frac{1}{\alpha}du$;
- déterminer les nouvelles bornes de l'intégrale ;
- utiliser l'égalité : $\int_a^b f(\alpha t + \beta)dt = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta}\frac{f(u)}{\alpha}du$;
- achever les calculs.

Exemple d'application

Calculons $\int_{\frac{2}{2}}^{1} \frac{t^2}{(3t-1)^3}dt$

Posons : $u = 3t - 1$ On a : $t = \frac{u+1}{3}$

$du = 3dt$, d'où $dt = \frac{1}{3}du$

Pour $t = \frac{2}{3}$, $u = 1$ et pour $t = 1$, $u = 2$.

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1} \frac{t^2}{(3t-1)^3}dt = \frac{1}{3}\int_{1}^{2} \frac{\left(\frac{u+1}{3}\right)^2}{u^3}du = \frac{1}{27}\int_{1}^{2} \frac{u^2+2u+1}{u^3}du = \frac{1}{27}\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{2}{u^2}+\frac{1}{u^3}\right)du$$

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1} \frac{t^2}{(3t-1)^3}dt = \frac{1}{27}\left[\ln u - \frac{2}{u} - \frac{1}{2u^2}\right]_1^2 = \frac{1}{27}\left(\ln 2 - 1 - \frac{1}{8} - \left(-2-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{27}\left(\ln 2 + \frac{11}{8}\right).$$

Pour s'entraîner : exercices 21 ;22

5. INTÉGRALE D'UNE FONCTION PAIRE, IMPAIRE OU PÉRIODIQUE

A) Intégrale d'une fonction paire ou impaire

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0 et un élément de I.

- Si f est paire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$ et $\int_{-a}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(t)\,dt$.
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$.

Exemple d'application

- Calculons $\int_{-2}^{2} \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)dx$

La fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$ est continue sur [-2;2] et elle est impaire.

Donc $\int_{-2}^{2} \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)dx = 0$

- Justifions que : $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{12}} \cos 2t\,dt = [\sin 2t]_0^{\frac{\pi}{12}}$

La fonction : $t \mapsto \cos 2t$ est continue sur $\left[-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right]$ et elle est paire.

Donc :

$$\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{12}} \cos 2t\,dt = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{12}} \cos 2t\,dt = 2\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{12}} = [\sin 2t]_0^{\frac{\pi}{12}}$$

Pour s'entraîner : exercices 23 ;24 ; 25

B) Intégrale d'une fonction périodique

Propriété

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T et soit α et β deux nombres réels.

On a : $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,dt = \int_{0}^{T} f(t)\,dt$ et

$$\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt.$$

Exemple d'application

Sans calcul, justifions que : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}(\cos x+\sin x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x+\sin x)dx$.

Les fonctions : $x\longmapsto \cos x$ et $x\longmapsto \sin x$ sont périodiques de période 2π. On a :

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}(\cos x+\sin x)dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}+2\pi}(\cos x+\sin x)dx=\int_{0}^{2\pi}(\cos x+\sin x)dx\cdot$$

$$=\int_{-\pi}^{-\pi-2\pi}(\cos x+\sin x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x+\sin x)dx\cdot$$

6. FONCTIONS DU TYPE : $x\mapsto\int_a^x f(t)dt$

Pour s'entraîner : exercices 26 ; 27

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I.

La fonction $x\mapsto\int_a^x f(t)\,dt$, de I vers $\mathbb{R}$, est la primitive de f qui s'annule en a.

Exemple d'application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x)=\int_{-1}^{x}\frac{dt}{1+t^2}$.

Déterminons $f'(x)$ et donnons la valeur de $f(0)$.

f est la primitive de la fonction : $t\mapsto\frac{1}{1+t^2}$ qui s'annule en −1.

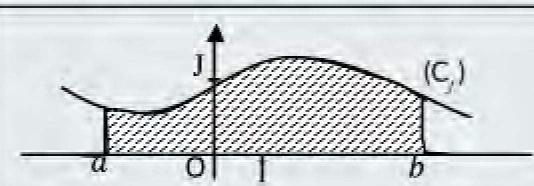
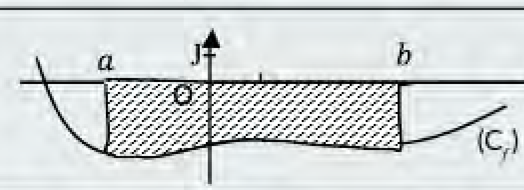
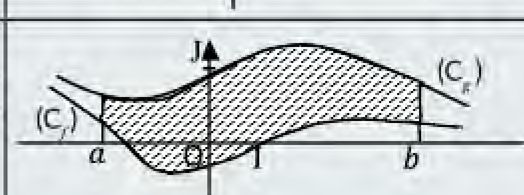
Donc : $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ et $f(-1)=0$.

Pour s'entraîner : exercices 28 ; 29

7. CALCULS D'AIRES

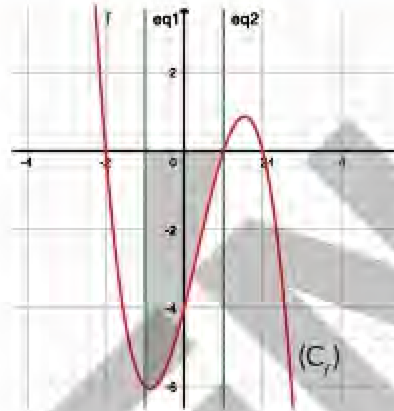
Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.
Soient a et b deux éléments de I, tels que $a<b$.
Soient (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et de g dans le plan muni d'un repère orthogonal.

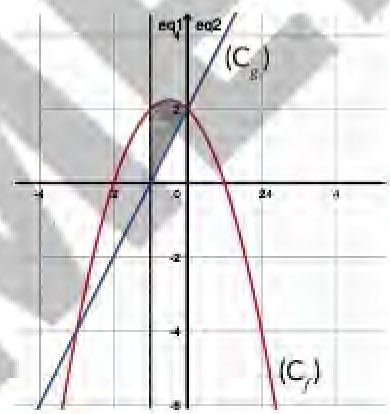
• Si f est positive sur [a ;b], alors l'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par (C_f), l'axe (OI) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est : $\int_a^b f(t)\,dt$.	
• Si f est négative sur [a ;b], alors l'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par (C_f), l'axe (OI) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est : $-\int_a^b f(t)\,dt$.	
• Si $f\leq g$ sur [a ;b], alors l'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par (C_f), (C_g), les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est : $\int_a^b (g(t)-f(t))\,dt$.	

Exemple d'application

- Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique : 1 cm).
La courbe (C_f) ci-contre, est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = (x-1)(4-x^2)$.
Calculons l'aire $\mathcal{A}$ en cm², du domaine limité par (C_f), l'axe (OI) et les droites d'équations $x = -1$ *et* $x = 1$.
On a : $\mathcal{A} = -\int_{-1}^{1} f(x)dx \times u.a$ où $u.a$ =1 cm².
$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{1}\left(x^3 - x^2 - 4x + 4\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x\right]_{-1}^{1} = \frac{22}{3}\text{cm}^2.$$



- Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) tel que : OI=2 cm et OJ=1 cm.
On donne ci-contre, les représentations graphiques (C_f) et (C_g) respectivement des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$, par :
$f(x) = -x^2 - x+2$ et $g(x) = 2x+2$.
Calculons $\mathcal{A}$, l'aire en cm², du domaine limité par (C_f), (C_g) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.
$\forall x \in [-1;0]$, $f(x) \geq g(x)$.
Donc : $\mathcal{A} = \int_{-1}^{0}(f(x) - g(x))dx \times u.a$, où $u.a$ =2 cm².
$$\mathcal{A} = 2\left(\int_{-1}^{0}\left(-x^2 - 3x\right)dx\right)\text{cm}^2 = \left(\left[-\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_{-1}^{0}\right)\text{cm}^2 = \frac{7}{3}\text{cm}^2.$$



Pour s'entraîner : Exercices 30 ; 31 ; 32 ; 33 ; 34

8. CALCUL APPROCHÉ D'UNE INTÉGRALE PAR LA MÉTHODE DES RECTANGLES

A) Valeurs approchées de $\int_a^b f(x)dx$

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$ $(a < b)$.
n est un nombre entier naturel non nul.

On considère la subdivision régulière : $x_i = a + \frac{b-a}{n}i$ où $i = 0 ; 1 ; ... ; n$.

En choisissant pour tout nombre réel x de $[x_i ; x_{i+1}]$, $f(x_i)$ comme valeur de $f(x)$, on obtient une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$. C'est le nombre u_n tel que : $u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right)$.

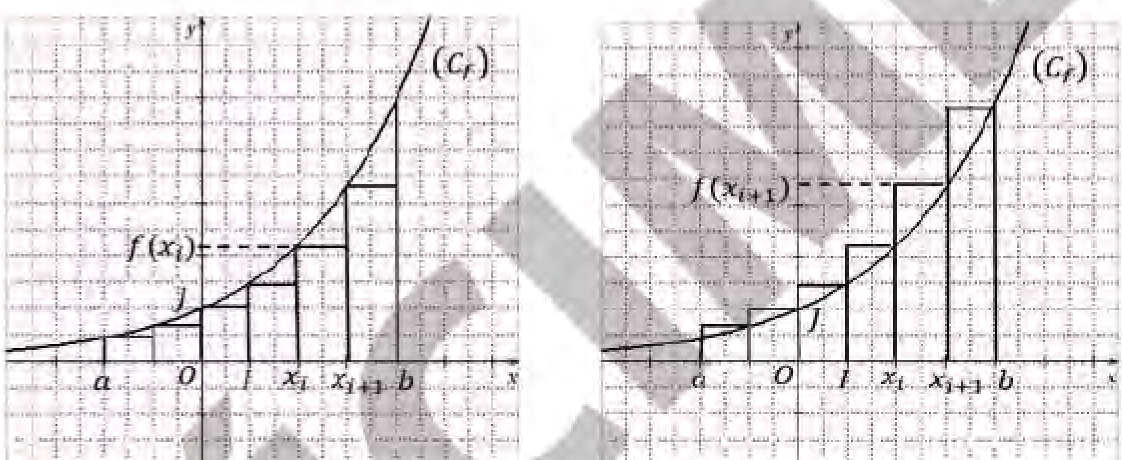
Aussi, en choisissant pour tout nombre réel x de $[x_i ; x_{i+1}]$, $f(x_{i+1})$ comme valeur $f(x)$, on obtient une autre valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$.

C'est un nombre v_n tel que : $v_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right)$.

> **Remarques**

- ✓ La méthode utilisée pour déterminer les valeurs approchées u_n et v_n de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est appelée méthode des rectangles.
- ✓ Si f est croissante sur $[a;b]$, alors : $u_n \leq \int_a^b f(x)dx \leq v_n$.
- ✓ Si f est décroissante sur $[a;b]$, alors : $v_n \leq \int_a^b f(x)dx \leq u_n$.
- ✓ Le nombre réel $\dfrac{u_n+v_n}{2}$ est une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$ à $\left|\dfrac{v_n-u_n}{2}\right|$ près.
- ✓ Le nombre réel $\dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f\left(a+\dfrac{b-a}{n}i\right)$ est aussi une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$

Illustration



Exemple d'application

Soit l'intégrale $I=\int_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}}\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Déterminons un encadrement de I par la méthode des rectangles, en subdivisant l'intervalle $\left[\dfrac{2}{5};\dfrac{3}{5}\right]$ en dix intervalles de même amplitude et donnons une valeur approchée de I, en précisant l'incertitude.

La fonction $f : x \rightarrow \sqrt{4-x^2}$ est continue, positive et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{2}{5};\dfrac{3}{5}\right]$.

On a : $\dfrac{0{,}2}{10}\sum_{i=1}^{10} f(x_i) \leq \int_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}}\sqrt{4-x^2}\,dx \leq \dfrac{0{,}2}{10}\sum_{i=0}^{9} f(x_i)$.

$$\frac{0{,}2}{10}\sum_{i=1}^{10} f(x_i)=0{,}02\left[f(0{,}42)+f(0{,}44)+f(0{,}46)+f(0{,}48)+f(0{,}5)+f(0{,}52)+f(0{,}54)+f(0{,}56)+f(0{,}58)+f(0{,}6)\right].$$

$$\frac{0{,}2}{10}\sum_{i=0}^{9} f(x_i)=0{,}02\left[f(0{,}4)+f(0{,}42)+f(0{,}44)+f(0{,}46)+f(0{,}48)+f(0{,}5)+f(0{,}52)+f(0{,}54)+f(0{,}56)+f(0{,}58)\right].$$

On obtient l'encadrement $0,38659 \le \int_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}} \sqrt{4-x^2}\,dx \le 0,38763$

$\dfrac{0,38659+0,38763}{2} = 0,38711$; $\dfrac{0,38763-0,38659}{2} = 0,00052$

Donc, une valeur approchée de I à 5.10^{-4} près est : 0,38711.

Pour s'entraîner : exercices 35; 36 ; 37

B) Intégrale et limite

Nous admettons la propriété suivante :

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et n un entier naturel non nul. On considère la subdivision régulière $x_i = a + \dfrac{b-a}{n}i$, $i = 0, \ldots, n$.

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Exemple d'application

Étudions la convergence de la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin\dfrac{k\pi}{n} = \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \sin\left(\dfrac{n-\pi}{n}\right)$

Considérons la fonction $f : x \mapsto \sin \pi x$ On a : $u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin\dfrac{k\pi}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right) = \dfrac{1-0}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(0 + \dfrac{1-0}{n}k\right)$

La suite (u_n) converge vers $\int_0^1 f(x)dx$

On a : $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sin\pi x dx = \left[-\dfrac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1 = -\dfrac{1}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) = \dfrac{2}{\pi}$.

On conclut que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{2}{\pi}$.

QUESTION 1

Comment calculer une intégrale du type $\int_a^b \cos^m x \sin^n x dx$?

Méthode

Pour calculer $\int_a^b cos^m x sin^n x dx$ où m et n sont des entiers naturels non tous nuls, on peut procéder comme suit :

- **1er cas** : m et n sont pairs.
  - On linéarise l'expression $cos^m x sin^n x$
  - On déduit de la forme linéarisée obtenue une primitive de $cos^m x sin^n x$
  - On calcule l'intégrale
- **2ème cas** : m et n sont impairs.
  - En supposant que m est impair, on transforme l'expression $cos^m x sin^n x$ en écrivant : $cos^m x sin^n x = cos x \times cos^{m-1} x sin^n x$
  - On exprime $cos^{m-1} x$ en fonction de sin$x$ et on développe $cos x \times cos^{m-1} x sin^n x$.
  - Ce développement nous ramène à une somme de termes du type $u'u^p$ dont on détermine des primitives sous la forme $\frac{1}{p+1}u^{p+1}$.
  - On calcule l'intégrale.

Exercice

Calcule : a) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos^2 x \sin^4 x dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin^2 x dx$.

Solution commentée

a) Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos^2 x \sin^4 x dx$

Les exposants de cos x et de sin x sont tous deux pairs.
- On va linéariser l'expression $cos^2 x\, sin^4 x$.

$cos^2 x sin^4 x = (cos x\, sin x)^2 \times sin^2 x$

On sait que : pour tout nombre réel x , $sin 2x = 2 sin x\, cos x$ et $sin^2 x = \frac{1-cos 2x}{2}$.

D'où : $cos^2 x sin^4 x = \left(\frac{1}{2} sin 2x\right)^2 \times sin^2 x = \frac{1}{4}\left(\frac{1-cos 4x}{2}\right) \times \left(\frac{1-cos 2x}{2}\right)$.

Après développement, on obtient :

$cos^2 x\, sin^4 x = \frac{1}{16}(1 - cos 2x - cos 4x + cos 4x\, cos 2x)$

Sachant que : pour tous nombres réels x et y, $cos x\, cos y = \frac{1}{2}[cos(x+y) + cos(x-y)]$

On a : $cos^2 x\, sin^4 x = \frac{1}{16}\left(1 - cos2x - cos4x + \frac{1}{2}(cos6x + cos2x)\right)$

$$cos^2 x\, sin^4 x = \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{2}cos2x - cos4x + \frac{1}{2}cos6x\right)$$

- On détermine une primitive sur $\left[0;\frac{\pi}{12}\right]$ de la fonction : $x \to cos^2 x\, sin^4 x$

C'est la fonction $x \to \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}sin2x - \frac{1}{4}sin4x + \frac{1}{12}sin6x\right)$

On calcule $\int_0^{\frac{\pi}{12}} cos^2 x\, sin^4 x dx$ en utilisant la primitive trouvée .

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} cos^2 x\, sin^4 x dx = \frac{1}{16}\left[x - \frac{1}{4}sin2x - \frac{1}{4}sin4x + \frac{1}{12}sin6x\right]_0^{\frac{\pi}{12}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} cos^2 x\, sin^4 x dx = \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}sin\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{12}sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} cos^2 x\, sin^4 x dx = \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{12}\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} cos^2 x\, sin^4 x dx = \frac{2\pi - 3\sqrt{3} - 1}{384}.$$

Remarque : On peut aussi utiliser les formules d'Euler pour linéariser $cos^2 x\, sin^4 x$.

b) Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^5 x\, sin^2 x dx$.

L'exposant de cos x est impair.

- On écrit d'abord : $cos^5 x\, sin^2 x = cosx\, cos^4 x\, sin^2 x$

- On exprime $\cos^4 x$ en fonction de $\sin x$ et on développe $\cos x \cos^4 x \sin^2 x$.

$$cos^4 x = \left(cos^2 x\right)^2 = \left(1 - sin^2 x\right)^2 = 1 - 2sin^2 x + sin^4 x$$

Ainsi : $cosx\, cos^4 x\, sin^2 x = cosx\left(1 - 2sin^2 x + sin^4 x\right)sin^2 x$

Donc : $cos^5 x\, sin^2 x = cosx\, sin^2 x - 2cosx\, sin^4 x + cosx\, sin^6 x.$

- On détermine une primitive sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction $x \mapsto cos^5 x\, sin^2 x$ en utilisant sa forme développée.

Une primitive est : $x \mapsto \frac{1}{3}sin^3 x - \frac{2}{5}sin^5 x + \frac{1}{7}sin^7 x$

- On calcule $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^5 x\, sin^2 x dx$ en utilisant la primitive trouvée .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^5 x\, sin^2 x dx = \left[\frac{1}{3}sin^3 x - \frac{2}{5}sin^5 x + \frac{1}{7}sin^7 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{15} + \frac{1}{7} = \frac{8}{105}.$$

■ **Exercice non corrigé**

Calcule les intégrales suivantes :

a) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} sin^3 2x\, cos^2 2x dx$ b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} cos^4 x\, dx.$

QUESTION 2

Comment calculer une intégrale du type $\int_a^b \ln(kx+p)dx$?

Méthode

Pour calculer une intégrale du type $\int_a^b \ln(kx+p)dx$, on peut procéder comme suit :

- On effectue une intégration par parties en posant : $u(x)=\ln(kx+p)$ et $v'(x)=1$.
- On obtient : $\int_a^b \ln(kx+p)dx = [x\ln(kx+p)]_a^b - \int_a^b \frac{kx}{kx+p}dx.$
- On utilise l'égalité $\frac{kx}{kx+p}=1-\frac{p}{kx+p}$ pour trouver une primitive sur $[a;b]$ de la fonction $x \mapsto \frac{kx}{kx+p}$.
- On effectue le calcul de $\int_a^b \ln(kx+p)dx$.

■ **Exercice**

Calcule $\int_{-1}^{2} \ln(3x+4)dx$.

■ **Solution commentée**

- On pose : $u(x)=\ln(3x+4)$; on a $u'(x)=\frac{3}{3x+4}$

$v'(x)=1$ $\qquad v(x)=x$

On obtient :

$$\int_{-1}^{2} \ln(3x+4)dx = [x\ln(3x+4)]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} \frac{3x}{3x+4}dx.$$

- En utilisant l'égalité : $\frac{3x}{3x+4}=1-\frac{4}{3x+4}$,

on trouve une primitive sur $[-1;2]$ de la fonction $x \mapsto \frac{3x}{3x+4}$

Une primitive est $x \mapsto x-\frac{4}{3}\ln(3x+4)$.

On a :

$$\int_{-1}^{2} \ln(3x+4)dx = [x\ln(3x+4)]_{-1}^{2} - \left[x-\frac{4}{3}\ln(3x+4)\right]_{-1}^{2}$$

$$\int_{-1}^{2} \ln(3x+4)dx = \left[\left(x+\frac{4}{3}\right)\ln(3x+4)-x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(2+\frac{4}{3}\right)\ln 10 - 2 - \left(\frac{1}{3}\ln 1 + 1\right).$$

$$\int_{-1}^{2} \ln(3x+4)dx = \frac{10}{3}\ln 10 - 3.$$

Remarque : On peut rendre les calculs plus simples en choisissant $v(x)=x+\frac{4}{3}$.

■ **Exercice non corrigé**

Calcule $\int_{-1}^{1} \ln(2-x)dx$.

QUESTION 3

Comment déterminer à l'aide d'une intégrale, des primitives de certaines fonctions du type fg ?

Méthode

Pour déterminer des primitives sur un intervalle K de certaines fonctions du type fg, on peut procéder de la manière suivante :

- On définit sous forme d'intégrale la primitive de fg qui s'annule en un élément a de K.
- On cherche la forme explicite de cette primitive à l'aide d'une ou de plusieurs intégrations par parties.

Exercice

En utilisant une intégration par parties, détermine la primitive H sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction h définie par $h(x)=(x-1)cosx$.

Déduis-en les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction h

Solution commentée

- La primitive H est définie par : $H(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}(t-1)costdt$.

- On va expliciter H en effectuant une intégration par parties.

Posons : $u(t)=t-1$ On a : $u'(t)=1$

$v'(t)=cost$ $v(t)=sint$

$$H(x)=\left[(t-1)sint\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}sintdt=\left[(t-1)sint\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}-\left[-cost\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}=\left[(t-1)sint+cost\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}.$$

$$H(x)=(x-1)sinx+cosx-\left(\left(\frac{\pi}{2}-1\right)sin\frac{\pi}{2}+cos\frac{\pi}{2}\right).$$

$$H(x)=(x-1)sinx+cosx-\frac{\pi}{2}+1.$$

On en déduit que les primitives sur $\mathbb{R}$ de h sont de la forme : $x\mapsto(x-1)sinx+cosx+c$, où $c\in\mathbb{R}$.

Exercice non corrigé

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\frac{lnx}{x^2}$.

A l'aide d'une intégration par parties, détermine la primitive F de f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en e.

Mes séances d'exercices

Exercices de fixation

Définition de l'intégrale

1 Recopie et réponds par Vrai si l'affirmation est vraie ou par Faux si elle est fausse.

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	F_1 et F_2 sont deux primitives d'une fonction f sur un intervalle $[a\,;b]$, telles que : $\forall\, x \in [a\,;b]$, $F_1(x) = F_2(x) + 8$. On a : $\left[F_1(x)\right]_a^b \neq \left[F_2(x)\right]_a^b$		
2	F est une primitive d'une fonction f sur l' intervalle $[-1;3]$. Si : $\int_{-1}^{3} f(x)dx = 5$, alors $F(-1) = 5 - F(3)$		
3	L'intégrale $\int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$ est égale à 1.		
4	L'intégrale $\int_0^1 e^x dx$ est égale à $1- e$		

2 Calcule chacune des intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^{-2} \frac{1}{t^4}dt$
2. $\int_1^2 \sqrt{t}dt$
3. $\int_{-1}^{1} (x+1)dx$
4. $\int_0^{\ln 3} e^{2x}dx$

5) $\int_1^{e} \frac{2}{2u-1}du$
6) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos u\, du$
7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(3v - \frac{\pi}{6}\right)dv$
8) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dv}{\cos^2 v}$.

Linéarité de l'intégrale

4 Sachant que : $\int_1^4 f(t)dt = 2$ et $\int_1^4 g(t)dt = -1$

Calcule : $\int_1^4 (-4f+5g)(t)dt$.

5 Calcule en utilisant la propriété de linéarité de l'intégrale :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} [2\cos x - 3\sin x]dx$ 2) $\int_1^4 \left(\frac{5}{2\sqrt{x}} + 4x\right)dx$

3. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ (Utilise l'égalité : $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$)

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$.

3 Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, écris Vrai si l'affirmation est vraie et Faux si elle est fausse.

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	f est une fonction continue sur [-1;1]. On a : $\int_{-1}^{1} f(3x)dx = 3\int_{-1}^{1} f(x)dx$.		
2	$\int_0^{\pi} \sin 2x dx = 2\int_0^{\pi} \sin x \cos x dx$		
3	f est une fonction continue sur [1;3]. Si $\int_1^3 f(x)dx = 2$ alors $\int_1^3 \left(\frac{3}{2}f(x) - x\right)dx = -1$.		
4	$\int_{\ln 3}^{\ln 2} \frac{2e^{2x}}{\ln x + 2}dx + \int_{\ln 3}^{\ln 2} \frac{e^{2x}\ln x}{\ln x + 2}dx = \frac{5}{2}$.		

Relation de Chasles

6 Dans chacun des cas suivants, quatre réponses sont proposées et une seule est correcte.

Choisis la réponse correcte.

1. g est une fonction continue sur un intervalle K ; m,n et p sont trois éléments de K.

$-\int_m^n g(x)dx - \int_p^m g(x)dx$ est égale à :

a) $\int_p^n g(x)dx$ b) $\int_{-n}^{-p} g(x)dx$ c) $\int_p^n [-g(x)]dx$ d) $\int_{-p}^{-n} g(x)dx$

2. $\int_{-1}^{1} |-x|dx$ est égale à :

a) $\int_{-1}^{0} xdx - \int_0^1 (-x)dx$ b) $\int_{-1}^{0} xdx + \int_0^1 (-x)dx$

c) $-\int_{-1}^{0} xdx - \int_0^1 xdx$ d) $\int_{-1}^{0} (-x)dx - \int_0^1 (-x)dx$

Mes séances d'exercices

7 Soit f une fonction continue sur un intervalle K et a, b et c trois nombres réels de K.

Justifie que : $\int_a^b f(t)dt = \int_c^b f(t)dt - \int_c^a f(t)dt$.

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$\begin{cases} f(x) = e^x, \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{e}{x}, \text{ si } x > 1 \end{cases}.$$

Calcule l'intégrale $\int_0^{e^2} f(x)dx$.

9 Calcule :

1. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|dx$ 2. $\int_{-1}^{1} \left(1 - \left|1 - e^{-x}\right|\right)dx$ 3. $\int_1^3 \sqrt{x^2 - 4x + 4}dx$

Intégrale et inégalités

10 recopie et réponds par Vrai si l'affirmation est vraie ou par Faux si non.

1. Si f est une fonction continue et négative sur $[a ; b]$, alors : $\int_b^a f(x)dx \leq 0$.

2. f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.

Si $f + g \geq 0$ sur [a;b], alors $\int_b^a g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$.

3. Soit f une fonction continue sur [-1;1].

Si $\forall x \in$[-1;1] $f(x) \leq 2$, alors $\int_1^1 (4 - 2f(x))dx \geq 0$.

4. $\int_0^1 x^2 dx \geq \int_0^1 |x| dx$.

11 Démontre que : $\int_2^5 x\, dx \geq \int_2^5 \frac{6x - 9}{x} dx$.

12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$

Sachant que : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{4\cos x}{\pi^2} \leq f(x) \leq \frac{36\cos x}{\pi^2}$

détermine un encadrement de $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x^2} dx$.

Inégalité de la moyenne

13 Soit l'intégrale I tel que : $I = \int_2^3 \frac{\ln x}{x} dx$.

Sachant que : $\forall x \in [2;3]$, $\frac{\ln 2}{3} \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln 3}{2}$, justifie que :
$\frac{1}{6} \leq I \leq \ln 2$.

14 Démontre que : $\frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Valeur moyenne d'une fonction

15 Dans ce qui suit, quatre réponses sont proposées, mais une seule est correcte.

Écris le numéro de la réponse correcte.

m étant la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle [c ; d], on a :

1. $m = \frac{1}{c - d}\int_c^d f(x)dx$ 3. $m = -\frac{1}{c - d}\int_c^d f(x)dx$

2. $m = \frac{1}{d - c}\int_d^c f(x)dx$ 4. $m = -\frac{1}{d - c}\int_c^d f(x)dx$

16 Dans chacun des cas suivants, calcule la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle K.

1. $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$, $K = [0;3]$; 2. $f(x) = \frac{\cos \pi x}{2}$, $K = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

3. $f(x) = \tan x, K = \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$;

4. $f(x) = \frac{1}{(x - 3)^2}, K = [-1;1]$;

5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}, K = [10;17]$.

Intégration par parties

17 f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle [a;b] telles que leurs dérivées respectives f' et g' soient continues sur [a;b].

Parmi les égalités données ci-dessous, une seule est correcte. Écris la lettre correspondant à l'égalité correcte.

a) $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$.

b) $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$.

c) $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$.

d) $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_b^a - \int_a^b f'(x)g(x)dx$.

18 Pour chacune des égalités ci-dessous, réponds par V si légalité est vraie ou par F sinon.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos x\,dx = 0$ 2. $\int_0^{1} \frac{x}{e^x}\,dx = -1$;

3. $\int_1^{e} \ln x\,dx = 1$. 4. $\int_{\frac{1}{e}}^{1} 3x^2 \ln x\,dx = \frac{4}{3e^3} - \frac{1}{3}$.

19 A l'aide d'une intégration par parties, calcule chacune des intégrales suivantes :

1. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \ln(2x)\,dx$; 2. $\int_2^1 (x-1)\ln x\,dx$; 3. $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$;

4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$; 5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-x)\cos(4x)\,dx$; 6. $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$;

7. $\int_{-1}^{1} (x+1)e^{2x}\,dx$.

20 En utilisant deux intégrations par parties, calcule chacune des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx$; 2. $\int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^{-x}\,dx$; 3. $\int_1^{e} x(\ln x)^2\,dx$

4. $\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx$.

Changement de variable affine

21 A l'aide d'un changement de variable affine, calcule chacune des intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{t}{(2t+1)^4}\,dt$ 3. $\int_{-1}^{0} t\sqrt{1+t}\,dt$

2. $\int_1^2 t(4-t)^5\,dt$ 4. $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+2t}}\,dt$

22 Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.

En utilisant un changement de variable affine, démontre que : $\int_a^b \frac{1}{t}\,dt = \int_{a^2}^{ab} \frac{1}{t}\,dt$.

Intégrale d'une fonction paire ou impaire

23 g est une fonction continue sur un intervalle K centré en 0. a est un élément de K.

Pour chaque ligne du tableau, écris V si l'affirmation est vraie ou F si elle est fausse.

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	Si g est paire, alors $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2\int_{a}^{0} g(x)\,dx$		
2	Si g est paire, alors $\int_{-a}^{0} g(x)\,dx = \int_{0}^{a} g(x)\,dx$		
3	Si g est impaire, alors $\int_{-a}^{a} (g(x)-1)\,dx = a$		
4	Si $g(x) = \tan x$, alors $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} g(x)\,dx = 0$.		

24 Utilise la parité pour calculer chacune des intégrales suivantes :

1. $\int_{-2}^{2} \frac{3x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$ 2. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (|x|-5)\sin x\,dx$

3. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin 7x - \cos 2x)\,dx$ 4. $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{\tan 2x}{x^6+3}\,dx$

5. $\int_{-1}^{1} \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx$ 6. $\int_{-1}^{3} \frac{x|x|}{|x|+1}\,dx$

(Tu pourras remarquer que : $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$)

25 Démontre que : $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \ln(\cos 2x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \ln\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$

Intégrale d'une fonction périodique

26 Sans calculer les intégrales, justifie les égalités suivantes :

1) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x\,dx = \int_0^{\pi} \cos 2x\,dx$;

2) $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (\sin 2x - \cos 2x)\,dx = -2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x\,dx$.

27 Soit $K=\int_{-\frac{5\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{3}} \cos 4x\,dx$.

1. Justifie que : $K=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 4x\,dx$.
2. Déduis-en que : $K=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x\,dx$.

Fonctions du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$

28 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Écris sous forme d'intégrale, la primitive F de f qui s'annule en 1.

29 Soit g la fonction dérivable sur]-1;1[et définie par :

$g(x)=\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt$.

1. Détermine la dérivée de la fonction g.
2. Calcule $g(0)$.

Calculs d'aires

30 Dans chacun des cas suivants, quatre réponses sont proposées et une seule est correcte.

Écris la lettre qui correspond à la réponse correcte.

1. g est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

L'aire (en unités d'aire) de la partie du plan limitée par (C_g), l'axe (OI) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est le nombre :

a) $\int_b^a g(x)\,dx$; b) $\int_a^b g(x)\,dx$;

c) $\int_b^a |-g(x)|\,dx$; d) $\int_a^b g(-x)\,dx$.

2. g et h sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ telles que $g \leq h$ sur $[a\,;\,b]$.

L'aire (en unités d'aire) de la partie du plan limitée par (C_g), (C_h) et les droites d'équations

$x=a$ et $x=b$ est le nombre :

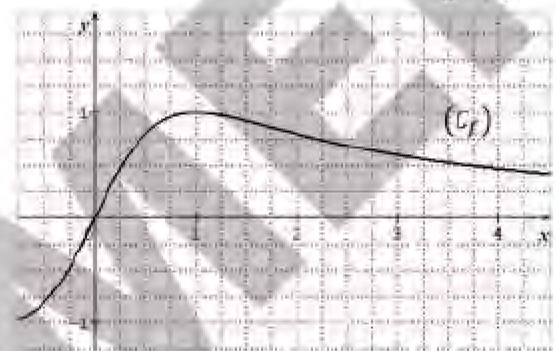
a) $\int_a^b \left(-h(x)+g(x)\right)dx$

b) $\int_b^a \left(h(x)-g(x)\right)dx$; c) $-\int_a^b \left(g(x)-h(x)\right)dx$

d) $-\int_b^a \left(g(x)-h(x)\right)dx$.

31 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J) (unité graphique : 2 cm).

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative (C_f) de la fonction f définie par : $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.



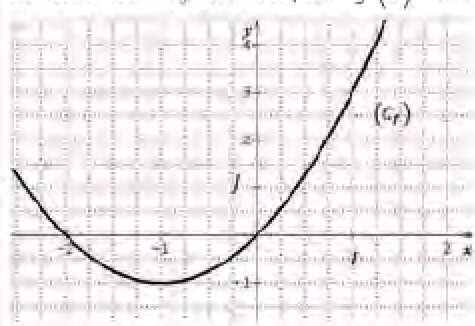
Calcule, en cm^2, l'aire A du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$.

32 Calcule, en cm^2, l'aire A du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations

$x=0$ et $x=2$.

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J) tel que : $OI=2\ cm$ et $OJ=1\ cm$.

On donne ci-dessous, la représentation graphique (C_f) de la fonction f définie par : $f(x)=x^2+2x$.



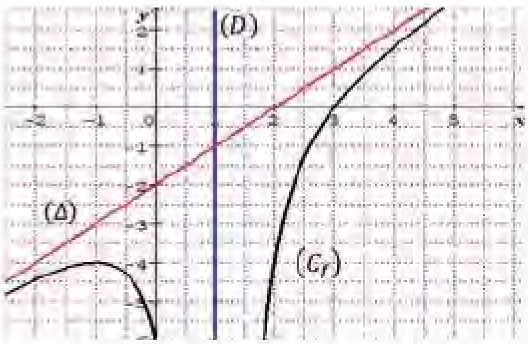
Calcule l'aire $\mathcal{A}(\Delta)$ en cm^2, du domaine Δ délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$.

33 L'unité graphique est le cm.

La figure ci-dessous donne la représentation graphique (C_f) de la fonction f définie par :

$f(x) = x - 2 - \frac{4}{(x-1)^2}$ et celles de ses asymptotes

$(D): x = 1$ et $(\Delta): y = x - 2$.

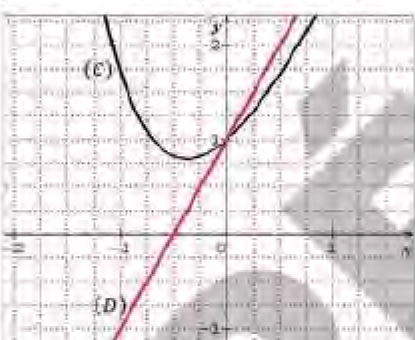


Calcule, en cm², l'aire A du domaine limité par (C_f), (Δ) et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

34 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$.

La courbe représentative (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) d'unité graphique 2 cm, est donnée par le graphique ci-dessous. La droite (D): $y = 2x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$



Calcule, en cm², l'aire A du domaine limité par (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

Calcul approché d'une intégrale par la méthode des rectangles

35 f est une fonction continue, positive et strictement décroissante sur un intervalle [a;b] ; n est un nombre entier naturel non nul.

On considère la subdivision : $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$,

où $i = 0 ; 1 ; ... ; n$.

Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. $\int_a^b f(x)dx \le \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$.

2. $\int_a^b f(x)dx \le \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$.

3. $\int_a^b f(x)dx \ge \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})$.

4. $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.

5. La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$ converge vers $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

6. Si $[a ; b] = [1 ; 2]$, alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$ est une valeur approchée de $\int_1^2 f(t)dt$.

36 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

f est une fonction continue, positive et strictement croissante sur [0,1;0,7], définie par : $f(x) = \frac{-2}{\ln x}$

En partageant [0,1 ; 0,7] en 6 intervalles de même amplitude, donne un encadrement de $\int_{0,1}^{0,7}\left(\frac{-2}{\ln x}\right)dx$

37 Soit l'intégrale $K = \int_{-1}^{4} \frac{e^x}{x^2+1}dx$

1. Détermine un encadrement de K par la méthode des rectangles, en subdivisant l'intervalle [−1;4] en dix intervalles de même amplitude.
2. Donne une valeur approchée de K, en précisant l'incertitude .

Exercices de renforcement /Approfondissement

38 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2e^x$.

1. Justifie que la fonction F définie par $F(x)=\left(x^2-2x+2\right)e^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Calcule $\int_{-1}^{0} x^2e^x\,dx$.

39 Calcule les intégrales suivantes :

1. $\int_{e}^{e^2}\frac{1}{t(lnt)^3}dt$; 2. $\int_{0}^{1}\left(x^2-1\right)\left(3x-x^3+1\right)^6dx$;

3. $\int_{0}^{2}\frac{2x}{\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}}dx$; 4. $\int_{-1}^{0}(2x+1)sinx(x+1)dx$;

5. $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$; 6. $\int_{0}^{2}\frac{e^x}{e^x+1}dx$; 7. $\int_{-1}^{1}2x^2\left(1-x^3\right)^2dx$;

8. $\int_{1}^{e}\frac{(lnx)^2}{x}dx$; 9. $\int_{0}^{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx$;

10. $\int_3^5\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}dx$; 11. $\int_0^2\frac{e^{-t}}{\left(e^{-t}-2\right)^4}dt$;

12. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}cos2tsin^4 2tdt$; 13. $\int_{e^2}^{e^3}\frac{1}{t\sqrt{lnt-1}}dt$;

14. $\int_{0}^{1}\frac{x+1}{2x^2+4x+3}dx$; 15. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{cosx}{e^{2sinx}}dx$; 16. $\int_{ln3}^{ln5}\frac{e^x-e^{-x}}{e^{-x}+e^x}dx$

17. $\int_{e}^{e^2}\frac{dx}{xlnx}$; 18. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin2x}{1+cos^2x}dx$.

40 Soit x et y deux nombres réels de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ tels que : $x < y$.

En utilisant l'inégalité de la moyenne, démontre que : $\frac{tany-tanx}{2}\leq y-x$.

41 En utilisant une ou plusieurs intégrations par parties, calcule chacune des intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}cosxdx$;

3) $\int_1^e x^2\,lnxdx$; 4) $\int_1^e\frac{ln(1+u)}{(1+u)^2}du$

42 En utilisant un changement de variable affine, calcule chacune des intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$; 2) $\int_0^1 x(1-x)^n dx$, n est un entier naturel non nul.

43 Pour $x > 0$, on pose : $\varphi(x)=\int_1^x\frac{lnt}{t+1}dt$.

Détermine $\varphi'(x)$ et dresse le tableau de variation de φ sur $]0;+\infty[$ (L'étude des limites n'est pas demandée).

44

1. Démontre que : $\forall t\in[0;+\infty[, 1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1$.
2. Déduis-en que : $\forall x\in[0;+\infty[, x-\frac{1}{2}x^2\leq ln(x+1)\leq x$.

45

1. x désigne un nombre réel. Linéarise $cos^4 2x$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calcule :

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-x)sin2xcos^3 2xdx$.

46 Calcule chacune des intégrales suivantes en utilisant une linéarisation.

1. $\int_0^{2\pi}cos^4xdx$; 2. $\int_0^{2\pi}\sin^2x\cos^2xdx$;
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^2xcos^2xdx$; 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^5 2xdx$.

47 On considère la fonction f définie sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$, par : $f(x)=\frac{cosx}{sin^3x}$.

1) Démontre que : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right], f'(x)=\frac{2}{sin^2 x}-\frac{3}{sin^4 x}$

2) Soit $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{sin^2 x}dx$ et $J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{sin^4 x}dx$.

a) En utilisant la question 1, établis une relation entre les intégrales I et J.

b) Calcule l'intégrale I.

c) Déduis-en la valeur de J.

48 g est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $g(x)=\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$.

1) Détermine les nombres réels a, b et c tels que :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x)=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}$.

2) Calcule $\int_1^3 g(x)dx$.

49 On considère la fonction h définie sur $]2;+\infty[$ par :

$h(x)=\frac{x^3-x^2-8x+8}{(x-2)^2}$

1. Détermine les nombres réels a, b et c tels que :

$\forall x \in]2;+\infty[, h(x)=ax+b+\frac{c}{(x-2)^2}$.

2. Calcule : $\int_3^5 h(x)dx$.

50 On considère la suite (I_n) définie par :

$I_n=\int_0^1 x^n e^x dx$.

1. Calcule I_0 et I_1

2. À l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1}=e-(n+1)I_n$

3. Calcule l'intégrale J, telle que :

$J=\int_0^1 (x^3+2x^2-2x+1)e^x dx$.

51 On donne les intégrales : $I=\int_{-\pi}^{\pi} cos2x\,cos4x\,dx$ et $K=\int_{-\pi}^{\pi} sin2x\,sin4x\,dx$.

1. Calcule $I+K$ et $I-K$.

2. Déduis-en les valeurs de I et K.

52 Soit F l'application de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $F(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$.

1. a) Étudie les variations de F.

b) Déduis-en le signe de $F(x)$ pour tout x élément de $]0;+\infty[$.

2. a) Détermine, sur $]0;+\infty[$, le signe de la fonction f définie par : $f(x)=F(x)-\ln x$.

b) Déduis-en : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

3. Soit (C) la courbe représentative de F dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

a) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

b) Précise la position de (T) par rapport à (C).

4. a) Démontre que : $\forall t \in]1;+\infty[,\ e^t > te^{\frac{t}{2}}$

b) Déduis-en que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=+\infty$.

c) Interprète graphiquement la limite précédente et le résultat de $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

5. Construis (T) et (C).

53 Soit (C) un cercle de diamètre [AB] et de rayon R.

Un point M décrit le demi-cercle contenant le point C.

Calcule la valeur moyenne de AM² dans chacun des cas suivants.

a) On définit la position de M sur le demi-cercle par l'angle

$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}})$ dont une mesure est θ.

b) On définit la position de M par la distance AH, où H est le projeté orthogonal de M sur (AB).

54 On donne les intégrales :

$I=\int_0^{\pi}(x-1)cos^2 x\,dx$ et $J=\int_0^{\pi}(x-1)sin^2 x\,dx$.

1. a) Calcule $I+J$.

b) À l'aide d'une intégration par parties, calcule $I - J$.

2. Déduis-en les valeurs de I et J.

55 Soit f la fonction définie sur $]-\infty;3]$ par :
$f(x)=x\sqrt{3-x}$

Détermine les primitives de la fonction f sur $]-\infty;3]$.

56 On donne les intégrales :
$K=\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)^2}dx$ et $L=\int_1^2 \frac{\ln x}{(x+2)^3}dx$.

1. Sachant que :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \frac{1}{x(x+2)^2}=\frac{1}{4x}-\frac{1}{4(x+2)}-\frac{1}{2(x+2)^2},$$

Justifie que : $K=\frac{\ln 3}{4}-\frac{\ln 2}{4}-\frac{1}{24}$.

2. a) À l'aide d'une intégration par parties, justifie que : $L=-\frac{\ln 2}{32}+\frac{1}{2}K$.
   b) Déduis-en la valeur de L.

57 Le but de l'exercice est de donner par la méthode des rectangles un majorant de l'erreur absolue issue de l'approximation de l'intégrale d'une fonction dérivable sur un intervalle [a ; b] dont la dérivée est continue sur cet intervalle. Soit f une fonction de [a ; b] dans $\mathbb{R}$ dérivable et dont la dérivée est continue.

1. Démontre qu'il existe un nombre réel M strictement positif, tel que pour tout x appartenant à $[a ; b]$: $|f'(x)| \leq M$.
2. Démontre que : $\int_a^b |f(x)-f(a)|dx \leq M\frac{(b-a)^2}{2}$.
3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose :

$$R_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+\frac{b-a}{n}i) \text{ et } E_n=\int_a^b f(x)dx-R_n.$$

   a) Démontre que :

$$E_n=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a+\frac{b-a}{n}i}^{a+\frac{b-a}{n}(i+1)} (f(x)-f(a+\frac{b-a}{n}i))\,dx.$$

   b) Déduis-en que : $|E_n| \leq M\frac{(b-a)^2}{2n}$.
4. Application :
5. On considère la fonction f de [0 ; 1] dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=e^{-x^2}$.
6. Détermine n de sorte que R_n soit une valeur approchée de $\int_a^b f(x)\,dx$ à 10^{-4} près.

58 Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J) tel que : OI = 2 cm et OJ = 3 cm.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par :
$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. a) Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
   c) Déduis-en le tableau de variation de f.
2. Trace la courbe représentative (C) de la fonction f dans le repère (O,I,J).
3. Détermine, en cm², l'aire A de la partie du plan limitée par (C),(OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \sqrt{3}$.

59 Soit les intégrales : $I=\int_0^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx, J=\int_0^{\pi} e^x\sin^2 x\,dx$ et $K=\int_0^{\pi} e^x\cos 2x\,dx$.

1. À l'aide de deux intégrations par parties, démontre que : $K=\frac{e^{\pi}-1}{5}$.
2. a) Calcule les intégrales $I+J$ et $I-J$.
   b) Déduis-en les valeurs de I et J.

60 Pour tout entier naturel n non nul, on pose :
$I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$.

1. Démontre que : $I_1=\frac{1}{2}\ln 2$.
2. Démontre que pour tout entier naturel non nul, $I_n \geq 0$.
3. Démontre que pour tout entier naturel non nul,
$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
4. a) Démontre que pour tout entier naturel non nul, la suite (I_n) est décroissante.
   b) Étudie la convergence de la suite (I_n) puis détermine $\lim I_n$.

61 On considère l'intégrale : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ où $n \in \mathbb{N}$

1. En utilisant la technique d'intégration par parties, démontre que : $\forall n \geq 2$,

   $I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$.

2. a) Calcule I_0.

   b) Déduis-en les valeurs de I_2 et I_4.

62 Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$I_n = \int_{e^{n-1}}^{e^n} \frac{2\ln t}{t} dt.$$

1. Démontre que pour tout entier naturel n non nul, $I_n = 2n - 1$.

2. Démontre que pour tout entier naturel n non nul, (I_n) n'est pas bornée.

3. Démontre que pour tout entier naturel n non nul, $(\frac{I_n}{n})$ est convergente.

4. Démontre que pour tout entier naturel n non nul,

   $I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n = n^2$.

63 On considère l'intégrale : $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$ où n est un entier naturel non nul.

1. Calcule : $I_0 = \int_1^e x^2 dx$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calcule I_1.

3. À l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3I_{n+1} + (n+1) I_n = e^3$.

4. Déduis-en la valeur de I_2

5. Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$.

6. Déduis de la question 3 que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$.

7. Détermine : $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

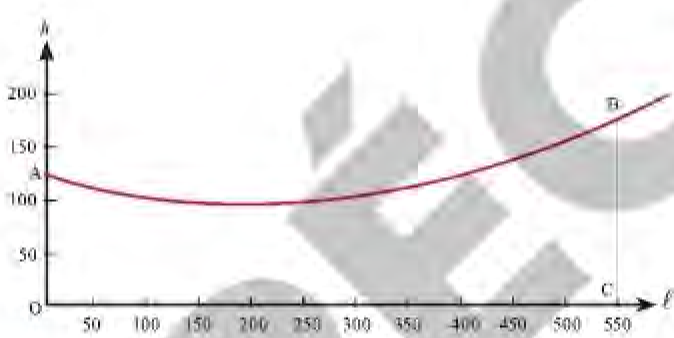
Situations complexes

64 Une entreprise veut construire un pont de forme curviligne reliant deux quartiers A et B distants de 550 mètres, comme l'indique la figure ci-dessous. Pour assurer l'équilibre du pont, chaque distance d a été ajustée à une hauteur h définie par la relation :

$$h(\ell)=\frac{\ell^2}{1600}-\frac{\ell}{4}+125.$$

En attendant la fin des travaux et pour empêcher tout passage en dessous du pont, le maître d'œuvre doit couvrit la surface OABC avec un grillage synthétique. Il confit la tâche à un ouvrier. Celui-ci veut savoir combien de mètre carré de grillage il faut pour cette couverture. Ne sachant comment s'y prendre, il te sollicite.

Propose-lui une solution argumenté en utilisant tes connaissances mathématiques.



65 Un cultivateur dispose d'une grande parcelle rectangulaire pour ses cultures de maïs et d'igname comme l'indique la figure ci-dessous.

Malheureusement, une forte pluie a provoqué un glissement de terrain, réduisant la parcelle d'igname (voir figure).

Un expert a utilisé la fonction $\ell : x \mapsto 2 - \ln x$ pour modéliser la partie de la courbe entre A et B, dans le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 1hm.

Déboussolé, le cultivateur veut déterminer la nouvelle superficie dont il disposera pour ses cultures, suite à ce glissement de terrain. N'y parvenant pas, il te sollicite.

Détermine cette nouvelle superficie à l'aide de tes connaissances mathématiques.

(On prendra 7,4 comme une valeur approchée de e^2 et on donnera l'arrondi d'ordre 0 du résultat trouvé)

66 Une maladie contagieuse s'est développée dans une ville en début d'année 2021.

Les responsables du district sanitaire de cette ville ont mené des études sur la maladie.

Il a été constaté que le nombre de personnes atteintes par cette maladie x jours après l'apparition de celle-ci , est défini par la fonction f telle que :

$f(x)=x^2e^{\frac{x}{30}}$ où $0 \le x \le 30$.

Pour étudier l'impact de la maladie sur les populations et apporter des réponses adéquates en vue de l'éradiquer, ils ont besoin de connaître le nombre moyen μ_p de personnes contaminées sur les 30 premiers jours.

Etant informé de ces études menées par le district sanitaire, utilise tes connaissances mathématiques au programme de terminale D pour calculer le nombre μ_p.

11 STATISTIQUES A DEUX VARIABLES

Commentaire de la Leçon

La statistique semble exister dès la naissance des premières structures sociales. D'ailleurs, les premiers textes écrits retrouvés étaient des recensements du bétail, des informations sur son cours et des contrats divers. On a des traces de recensement en Chine au XXIIIe siècle avant Jésus Christ ou en Egypte au XVIIIe siècle avant Jésus Christ. Ce système du recueil de données se poursuit jusqu'au XVIIe siècle.

L'apprenant a déjà étudié certaines notions des statistiques dans les classes antérieures. En classe de première D, les notions telles que l'histogramme, les polygones des effectifs et des fréquences, la médiane, les quartiles, la variance et l'écart – type ont été vues.

En classe de terminale, il s'agira d'aborder la notion de tableau à double entrée, de nuage de points et de l'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés.

On se servira d'une activité d'introduction pour rappeler le vocabulaire, les calculs de statistique à une variable, et le sens des notions de moyenne et de variance de séries simples.

Dans la rédaction des copies, les élèves devront :

soit faire apparaitre explicitement les formules, puis leur application numérique ;

soit faire les tableaux de calculs avec les valeurs des séries.

Cette leçon donne l'occasion d'exploiter les fonctions statistiques de la calculatrice, qui serviront à vérifier les résultats.

Les énoncés des exercices ou des évaluations devront indiquer la façon dont on arrondit les résultats.

Au supérieur, cette étude des statistiques sera approfondie par des notions telles que les ajustements logarithmiques et exponentiels, les estimations et les tests de validité d'hypothèses.

Le champ d'intervention de la statistique est très vaste et on peut en citer plusieurs : l'économie, la finance, l'assurance, la biologie, la médecine, les sciences humaines et de la terre, bref, tous les domaines dont on peut recueillir et interpréter les données.

Habiletés et Contenus

- ✓ **Connaître** la définition d'une série statistique à deux caractères ; la définition du point moyen d'un nuage de points ; les tableaux de fréquences marginales ; la formule de la covariance ; la formule du coefficient de corrélation linéaire ; les formules de calcul de a et b (resp. a' et b') dans l'équation $y = ax + b$ (resp. $x = a'y + b'$) d'une équation de la droite de régression par la méthode des moindres carrées de Y en X (resp. X en Y).
- ✓ **Établir** les séries marginales à partir d'un tableau à double entrée représentant une série statistique à deux caractères.
- ✓ **Représenter** un nuage de points dans le plan muni d'un repère orthogonal ; une droite d'ajustement de Y en fonction de X ; une droite d'ajustement de X en fonction de Y.
- ✓ **Placer** le point moyen d'un nuage de points dans le plan muni d'un repère orthogonal
- ✓ **Calculer** les coordonnées du point moyen ; la variance ; la covariance ; le coefficient de corrélation linéaire.
- ✓ **Interpréter** ; le coefficient de corrélation linéaire.
- ✓ **Déterminer** une équation d'une droite d'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés.
- ✓ **Estimer** la valeur de l'un des caractères connaissant la valeur correspondante de l'autre caractère: à l'aide d'une équation d'une droite d'ajustement ; à l'aide de la représentation graphique d'une droite d'ajustement.
- ✓ **Traiter une situation** faisant appel aux séries statistiques à deux caractères

Situation d'Apprentissage

Un riche entrepreneur offre une de ses entreprises à son fils. Celui-ci prend connaissance des chiffres d'affaires annuels de l'entreprise à travers le tableau ci-dessous.

Années	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Rang (x_i)	1	2	3	4	5	6
Chiffre d'affaire en millions de franc CFA (y_i)	99	130	92	108	232	150

Souhaitant connaitre le chiffre d'affaires de son entreprise en 2023 et 2024, il sollicite ton aide.

Après une analyse minutieuse de ce tableau, tu te rends dans le centre de documentation et d'information (CDI) de ton Lycée pour faire des recherches sur les séries statistiques à deux variables pour répondre à sa préoccupation.

Activité 1 Série statistique double

Pour effectuer des analyses sur ses patients, un médecin demande à son assistante de relever la taille en centimètre et la masse en kilogramme de chacun d'eux. Celle-ci a dressé le tableau suivant :

Taille (en cm)	155	160	165	170	179
Masse (en kg)	1	2	3	4	5

1. a) Détermine la population étudiée.

   b) Détermine l'effectif total de cette population.

2. a) Donne les différents caractères étudiés chez cette population.

   b) Détermine le type de chaque caractère.

Récapitulons

On étudie deux caractères quantitatifs X et Y sur une même population donnée.

On appelle série statistique double de caractère (X, Y) l'ensemble des couples de modalités (x_i, y_i) où x_i est une modalité du caractère X et y_i une modalité du caractère Y.

Exercice de fixation

1 Quatre observations sont numérotées de 1 à 4. Écris dans ton cahier le numéro de chacune de ces observations suivi de vrai, s'il s'agit d'une série statistique double ou de faux dans le cas contraire.

1. On observe la taille de 45 élèves d'une classe de terminale D et l'âge de 50 élèves d'une classe de terminale A.
2. On étudie la masse et l'âge de 150 employés d'une entreprise.
3. On s'intéresse au chiffre d'affaires d'une entreprise et au bénéfice réalisé par cette entreprise sur 5 ans.
4. On relève la masse de 10 nouveaux nés d'une clinique et de 10 nouveaux nés d'une maternité.

Activité 2 Disributions marginales en X et en Y

Le tableau ci-dessous donne la masse (X) en kilogramme (kg) et la taille (Y) en centimètre (cm).

Tableau 1

Poids (X)	65	68	62	68	68	59	71	74	68	68	74	71	65	62	65
Taille (Y)	165	177	174	165	171	165	177	174	171	165	174	174	174	168	171

Utilise le tableau précèdent pour compléter les tableaux suivants, après les avoir reproduits dans ton cahier :

Tableau 2

Y \ X	59	62	65	68	71	74
165						
168						
171						
174						
177						

Tableau 3

X	59	62	65	68	71	74
Effectif (n_i)						
Fréquence (f_i en %)						

Tableau 4

Y	165	168	171	174	177
Effectif (n_i)					
Fréquence (%)					

■ **Récapitulons**

Les tableaux 3 et 4 sont appelés les tableaux des fréquences marginales.

Exercice de fixation

2 Les résultats de l'étude de deux caractères X et Y sur une population sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Y \ X	9	14	20
6	6	12	9
12	4	8	6
18	9	14	6

Détermine les tableaux des fréquences marginales de chaque caractère.

Activité 3 Nuage de points- Points moyens

Le tableau ci- dessous donne les notes de Mathématiques (Maths) et de Physique chimie (PC) de 10 élèves d'une classe de terminale D à l'issu d'un examen blanc.

Maths (x_i)	9	12	5	6	9	14	3	6	12	14
PC (y_i)	10	13	8	10	13	17	5	8	16	16

1. Représente dans un repère orthogonal les 10 points M_i de coordonnées $(x_i ; y_i)$. (Prendre 1 cm pour unité graphique sur les deux axes.)
2. Calcule la moyenne des notes de maths $\overline{x}$ et la moyenne des notes de PC $\overline{y}$ obtenues par l'ensemble des 10 élèves. Place le point G($\overline{x}$; $\overline{y}$) dans le repère.

■ **Récapitulons**

- L'ensemble des points placés dans le repère précédent est appelé nuage de points.
- Le point G(10 ; 11,9) est appelé le point moyen du nuage de points.

Exercice de fixation

3 La taille (en cm) d'un jeune enfant est donnée en fonction de son âge (en mois), dans le tableau suivant :

Age x_i (en mois)	6	9	12	15	18	21	24	37	30	33
Taille y_i (en cm)	66	71	74	77	80	83	85	88	90	92

1- Représente le nuage de points de cette série statistique double dans un repère orthogonal.

2- Détermine le point moyen G de cette série statistique double puis place-le dans le même repère.

Activité 4 Covariance d'une série statistique double.

Le tableau ci-dessous donne les notes X en mathématique et Y en Physique obtenus par cinq candidats lors d'un concours.

X_i	8	7	9	10	11
Y_i	5	6	10	11	9

1- Détermine les coordonnées du point moyen G.

2- a) Complète le tableau

X_i	8	7	9	10	11
Y_i	5	6	10	11	9
X_iY_i					

b) Effectue la somme des X_iY_i puis divise le résultat obtenu par l'effectif total de la population étudiée. On notera T le résultat obtenu.

c) Effectue la différence de T et du produit $\overline{x} \times \overline{y}$.

Récapitulons

- Le nombre réel $T - \overline{x} \times \overline{y}$ est appelé la covariance de la série statistique double de caractères X et Y. On le note : cov (X,Y).
- D'une façon générale : soit P une population d'effectif N, X et Y deux caractères étudiés sur la population P. $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ l'ensemble des modalités de X et $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ l'ensemble des modalités de Y. $\overline{x}$ la moyenne de la série de caractère X, $\overline{y}$ la moyenne de la série de caractère Y. On suppose que l'effectif de chaque couple de modalités est égal à 1.
- On appelle covariance de la série statistique double de caractère X et Y, le nombre réel noté Cov (X, Y), égal à : $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$.
- On démontre que Cov (X, Y) = $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i y_i}{N} - \overline{x}\,\overline{y}$.

Exercices de fixation

4 Écris dans ton cahier le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de Vrai si l'affirmation est vraie ou de Faux si l'affirmation est fausse : Soit une série statistique à deux variables(x_i, y_i). $(1 < i \leq n)$

1. Cov(X,Y)= $\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - \overline{X}\overline{Y}$;
2. $Cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{Y})(y_i - \overline{X})$;
3. $Cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - \overline{X}\overline{Y}$;
4. $Cov(X,Y) \neq Cov(Y,X)$;
5. $Cov(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})$.

5 Reprenons la série statistique donnant l'évolution de la taille (en cm) d'un jeune enfant en fonction de son âge (en mois), dans le tableau:

Age x_i (en mois)	6	9	12	15	18	21	24	37	30	33
Taille y_i (en cm)	66	71	74	77	80	83	85	88	90	92

Détermine la covariance de cette série statistique double.

6 Le tableau suivant donne la tension T et le poids Z de 7 patients.

T	10	12	13	14	15	16	17
Z	10	11	10	11	12	9	14

Calcule la covariance de cette série statistique.

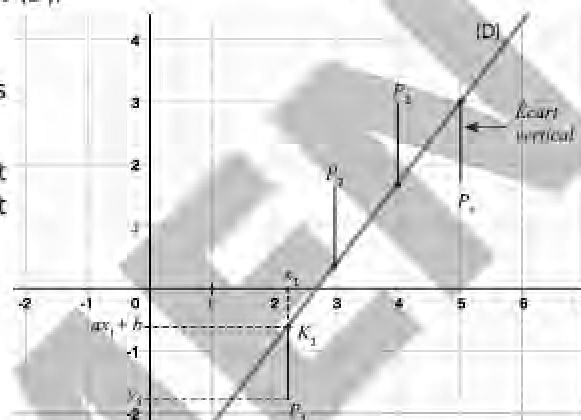
Activité 5 Droites de régression

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

On considère un nuage de points $P_1, P_2, \dots, P_n$ de coordonnées respectives (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; … ; (x_n, y_n).

On se propose de chercher les coefficients a et b pour que la droite (D) d'équation $y = ax + b$, soit celle qui rende minimum la somme des carrés des écarts "verticaux" à la droite (D).

(Voir figure ci-contre)



On suppose que les coefficients de pondération sont tous égaux à 1.

1. On considère par exemple le point $P_1(x_1, y_1)$ et K_1 le point d'intersection de la droite (D) et de la parallèle à (OJ) passant par P_1. Justifie que : $P_1K_1 = |y_1 - ax_1 - b|$.

2. On pose : $S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$.

   a) En fixant le coefficient a, justifie que :
   $S = nb^2 - 2b\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i) + \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i)^2$.

   b) En considérant S comme un trinôme du second degré en b, justifie que S est minimum pour : $b = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i)}{n}$.

   c) Déduis de la consigne précédente que : $b = \overline{y} - a\overline{x}$ où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ désignent les moyennes respectives des séries $x_1, x_1, \dots, x_n$ et $y_1, y_2, \dots, y_n$

   d) Justifie que la droite (D) passe par le point moyen G de coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$.

3. On remplace b par sa valeur : $\overline{y} - a\overline{x}$.

a) Justifie que : $S = a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 - 2a\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$.

b) En considérant S comme un trinôme du second degré en a, justifie que S est minimum pour :
$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}.$$

c) Déduis de la consigne précédente que : $a = \dfrac{Cov(x, y)}{v(x)}$.

4. Considérons les écarts "horizontaux".

a) Il est possible d'ajuster le nuage de points précédents à une droite (D') d'équation : $x = a'y + b'$.

En minimisant la somme S' tel que : $S' = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a'y_i - b')^2$, justifie que : $a' = \dfrac{Cov(x, y)}{v(y)}$ et $b' = \overline{x} - a'\overline{y}$.

b) Justifie que le point moyen $G(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à la droite (D').

Récapitulons

- La droite (D) d'équation $y = ax + b$ où $a = \dfrac{Cov(x, y)}{V(x)}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$ est appelée la droite de régression de y en x.
- La droite (D') d'équation $x = a'y + b'$ ou $a' = \dfrac{Cov(x, y)}{V(y)}$ et $b' = \overline{x} - a'\overline{y}$ est appelée la droite de régression de x en y.
- Le point moyen $G(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à la fois aux droites (D) et (D').

Activité 6 Coefficient de corrélation

Considérons le trinôme du second degré S, exprimé en fonction de a.

$$S = a^2 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 - 2a\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 .$$

Rappelons que S est la somme des carrés des "écarts verticaux".

On pose $r = \dfrac{Cov(x,y)}{\sigma(x).\sigma(y)}$ ou σ(x) et σ(y) désignent respectivement les écarts type de x et de y.

1. Justifie que : $r^2 = \dfrac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 . \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$.

2. a) en utilisant le discriminant du trinôme S, justifie que : $r^2 - 1 \leq 0$.

   b) Déduis-en que $|r| \leq 1$.

   c) Interprète le cas où : $|r| = 1$.

3. Soit (D) la droite d'ajustement de y en x telle que : (D) : $y = ax + b$ et (D') la droite d'ajustement x en y telle que : (D') : $x = a'y + b'$. Justifie que : $r^2 = aa'$.

Récapitulons

- Le réel r tel que : $r = \dfrac{Cov(x,y)}{\sigma(x).\sigma(y)}$ est appelé coefficient de corrélation linéaire entre les caractères X et Y. On a $r = \dfrac{Cov(x,y)}{\sqrt{V(x) \times V(y)}}$; $|r| \leq 1$;
- Soit (D) la droite d'ajustement de y en x telle que : (D) : $y = ax + b$ et (D') la droite d'ajustement x en y telle que : (D') : $x = a'y + b'$. On a : $r^2 = aa'$.
- Lorsque $|r| = 1$, tous les points du nuage sont alignés et (D) = (D').
- On admet qu'il y a une forte corrélation linéaire entre les caractère X et Y lorsque : $0{,}87 < |r| < 1$.

Exercice de fixation

8 Écris dans ton cahier le numéro de chacune des affirmations ci-dessous, suivi de Vrai si l'affirmation est vraie ou de Faux si l'affirmation est fausse.

Soit une série statistique à deux variables $(x_i ; y_i)$.

1. si r est le coefficient de corrélation linéaire entre les caractères X et Y, alors $r = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}}$;
2. si r est le coefficient de corrélation linéaire entre les caractères X et Y, alors $r = \dfrac{\sqrt{V(X) \times V(Y)}}{Cov(X,Y)}$;
3. si r est le coefficient de corrélation linéaire entre les caractères X et Y alors $r = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)} \times \sqrt{V(Y)}}$;
4. si r est le coefficient de corrélation linéaire entre les caractères X et Y, alors $r = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X) + V(Y)}}$.

9 On donne une série statistique double caractérisée par le tableau ci-dessous :

x_i	2	4	5	7	8	10
y_i	3	4	8	9	11	15

Calcule et interprète le coefficient de corrélation linéaire entre les deux caractères X et Y.

I. Définition d'une série statistique double

Définitions

On considère une population d'effectif n. Si on étudie deux caractères X et Y de cette population, on dit que l'on étudie une série statistique double. Chaque individu de cette population est désigné par un nombre compris entre 1 et n. A chaque individu $i(1 \leq i \leq n)$ correspond un couple $(x_i ; y_i)$, où x_i est la modalité du caractère X et y_i, la modalité du caractère Y associé à l'individu i.
L'ensemble des couples $(x_i ; y_i)$ définit une série statistique double.

Exemple

Le tableau ci-dessous donne pour chaque employé d'une entreprise le volume horaire de travail par mois, ainsi que leur salaire.

Employé	LIAM	AMINE	YVAN	YANIS	ALVINE
Volume horaire	120	130	145	150	160
Salaire	180 000	195 000	217 000	225 000	240 000

Population étudiée : les cinq employés

Caractère N°1 : le volume horaire de travail

Caractère N°2 : le salaire .

II. Fréquences marginales

Définitions

Les fréquences marginales des deux caractères X et Y définis sur la même population sont les fréquences de chacun des caractères pris séparément.

Exemple

Les résultats des études d'une série statistique double sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Y_i \ X_i	4	9	14	19
1	2	5	3	2
7	1	2	2	1
13	4	6	1	1

Le tableau des fréquences marginales de Y est :

Y_i	1	7	13
Fréquence en %	40	20	40

Le tableau des fréquences marginales de X est :

X_i	4	9	14	19
Fréquence en %	23 ,34	43,33	20	13,33

III. Nuage de points

définitions

Si l'on considère $x_1, x_2, ..., x_n$ sont les valeurs du premier caractère (on notera cette série (x_i)) et si l'on appelle y_1, y_2, ..., y_n les valeurs du second caractère (on notera cette série (y_i)), alors on représente cette série statistique double par un nuage de points dans un repère du plan constitué des points M_i de coordonnées (x_i, y_i).

Exemple

Le tableau suivant donne le montant X en millions de francs CFA qu'une entreprise consacre pour les frais mensuels de publicité et le montant Y en millions de francs CFA de ventes mensuelles réalisées.

X (en million de F CFA)	2	4	5	6	8	9	10
Y (en million de F CFA)	50	70	80	100	110	120	150

IV. Point moyen d'un nuage de points

Définitions

Soit $\overline{x}$ la moyenne de la série (x_i) et $\overline{y}$ la moyenne de la série (y_i).
Le point G de coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$, est appelé point moyen du nuage de point associé à la série statistique double (X,Y).

Exemple

On considère la série statistique double donnée par le tableau suivant :

X	25	35	40	50
Y	2	3	7	11

De la donnée de cette série statistique double, on peut déduire les séries statistiques simples dérivant séparément les caractères X et Y.

X	25	35	40	50
Effectif	1	1	1	1

Y	2	3	7	11
Effectif	1	1	1	1

$\overline{X} = \dfrac{25+35+40+50}{4}$ et $\overline{Y} = \dfrac{2+3+7+11}{4}$

$\overline{X} = 37{,}5$; $\overline{Y} = 5{,}75$

Le point moyen G (37,5 ; 5,75) est le point moyen du nuage de points associé à cette série statistique double.

V. Covariance d'une série statistique double

Définitions

On appelle covariance d'une série statistique double (X,Y), où les caractères X et Y sont quantitatifs le nombre noté $cov(X,Y)$ défini par : $Cov(X,Y) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont les moyennes des séries statistiques simples X et Y.

Propriétés

Soit (X, Y) un série statistique double, $cov(X,Y) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i y_i\right) - \bar{x}.\bar{y}$.

Remarques

On a : $cov(X,Y) = cov(Y,X)$.

Exemple d'application

La taille d'un enfant est donnée en fonction de son âge (en année) comme l'indique le tableau suivant :

Âge x_i (en année)	1	2	3	4
Taille y_i (en cm)	74	85	96	102

On a : $\bar{x}$ =2,5 et $\bar{y}$ =89,25

Cov(x,y) = $\frac{1}{4}$(1 × 74+2 × 85+3×96+4×102)-2,5×89,25

Cov(x,y) = $\frac{1}{4}$(74+170+288+408)-223,125

Cov(x,y) = $\frac{1}{4}$ × 940 - 223,125

Cov(x,y) = 11,875.

VI. Ajustement affine

a) Principe

Soit (X, Y) une série statistique double avec un nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ qui lui est associé.
Lorsque les points du nuage paraissent presque alignés, on peut chercher une relation de la forme $y=ax+b$ qui exprime de façon approchée les valeurs de la série (y_i) en fonction des valeurs de la série (x_i), autrement dit, une fonction affine f telle que l'égalité $y = f(x)$ s'ajuste au mieux avec les données.
Graphiquement, cela signifie qu'on cherche une droite qui passe au plus près de tous les points du nuage. Une telle relation permettrait notamment de faire des prévisions. Il existe de nombreuses manières d'obtenir un ajustement affine satisfaisant.

b) Exemple d'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrée.

Considérons la série statistique du 5-b)

x_i	3	5	7	8	9	10
y_i	160	380	600	650	800	875

Soit le point G ($\bar{X},\bar{Y}$), point du moyen du nuage de points..

$\bar{x} = \frac{3+5+7+8+9+10}{6}$ et $\bar{y} = \frac{160+380+600+650+800+875}{6}$

$\bar{X}$ =7 et $\bar{Y}$ = 577,5

Donc G (5 ; 577,5)
Soit V(X) la variance de X et V(Y) la variance de Y.

$V(x) = \frac{1}{6}(3^2+5^2+7^2+8^2+9^2+10^2) - 7^2$

$$V(x)=\frac{328}{6}-49$$

$$V(x)=\frac{164}{3}-49$$

$$V(x)=\frac{17}{3}$$

$$V(y)=\frac{1}{6}\left(160^2+380^2+600^2+650^2+800^2+875^2\right)-\left(\frac{3465}{6}\right)^2$$

$$V(y)=\frac{2358125}{6}-\frac{12006225}{36}$$

$$V(y)=\frac{2142525}{36}$$

Déterminons la covariance de cette série statistique double.

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{6}(3\times160+5\times380+7\times600+8\times650+9\times800+10\times875)-7\times\frac{3465}{6}$$

$$Cov(X,Y)=\frac{27730-24255}{6}=\frac{3475}{6}$$

Déterminons la droite de régression de y en x

$$a=\frac{cov(X,Y)}{V(X)}=\frac{3475}{6}\times\frac{3}{17}=\frac{3475}{34}$$

$$b=\overline{y}-a\overline{x}$$

$$b=\frac{3465}{6}-\frac{3475}{34}\times7=\frac{3465}{6}-\frac{24325}{34}=\frac{34580}{34}$$

$$b=\frac{17290}{17}$$

Donc, une équation de la droite de régression (D) de Y en X est : (D) : $y=\frac{3475}{34}x+\frac{17290}{17}$.

Déterminons une équation de la droite de régression de X en Y.

$$a'=\frac{Cov(X,Y)}{V(Y)}$$

$$a'=\frac{3475}{6}\times\frac{36}{2142525}$$

$$a'=\frac{278}{28567}$$

$$b'=\overline{x}-a'\overline{y}$$

$$b'=7-\frac{278}{28567}\times\frac{3465}{6}$$

$$b'=\frac{222915}{28567}$$

Donc une équation de la droite de régression (D') de X en Y est :

(D) : $x=\frac{278}{28567}y+\frac{222915}{28567}$

VII. Coefficient de corrélation linéaire

a) Définition

On appelle coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y), le nombre réel noté r tel que : $r = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}}$.

Remarques

- $-1 \leq r \leq 1$
- $aa' = r^2$
- Lorsque $|r| \geq |0{,}87$, la corrélation est forte, les droites de régression sont très proches et le nuage peut être approximé pour une droite.
- Lorsque la corrélation est faible, le nuage de points ne peut pas être ajusté par la droite, mais il se peut qu'une autre courbe permette un bon ajustement.

Exemple

On considère une série statistique double telle que :

Cov(X,Y) = 21,5 ; V(X) = 11,6 et V(Y) = 40,2

Déterminons le coefficient de corrélation de cette série statistique double puis interprétons le résultat obtenu.

On a : $r = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}}$

$$r = \frac{21{,}1}{\sqrt{11{,}6 \times 40{,}2}}$$

$r = 0{,}99$

Interprétation : Il existe une forte corrélation linéaire entre les deux caractères X et Y, donc on peut envisager un ajustement linéaire.

QUESTION 1

Comment représenter un nuage de points d'une série statistique double dans un repère orthogonal ?

Méthode 1

Pour représenter un nuage de points d'une série statistique double dans un repère orthogonal, on peut procéder comme suit :

- On considère que chaque colonne du tableau portant les valeurs des différents caractères correspond à un point M_i de coordonnées (x_i, y_i) ;
- On choisit en fonction des données, une échelle adaptée à chaque axe du repère (les réel x_i sont à placer sur l'axe des abscisses et les réels y_i sur l'axe des ordonnées) ;
- On place tous les points $M_i(x_i, y_i)$ dans le repère orthogonal choisi.

Exercice

On considère la série statistique double suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	15	24	35	42	49	55

Représente le nuage de point de cette série statistique double.

Solution commentée

- On considère les points $M_1(0 ;15)$, $M_2(1 ; 24)$, $M_3(2 ; 38)$, $M_4(3 ; 42)$, $M_5(4 ; 49)$ et $M_6(5 ; 55)$
- On prendra comme échelle 1 cm ⇔ 1 sur l'axe des abscisses
  1 cm ⇔ 5 sur l'axe des ordonnées.
- On place les points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 et M_6 dans un repère orthogonal.

Exercice non corrigé

On observe la production y_i en tonne d'une plantation de cacao sur 5 ans et on dresse le tableau suivant :

Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5
Production y_i (en tonne)	18	20	19	17	22

Représente le nuage de points associé à cette série statistique double.

QUESTION 2

Comment déterminer le point moyen d'un nuage de points ?

Méthode

Pour déterminer le point moyen de nuage de points, on peut procéder comme suit :

On calcule la moyenne $\overline{x}$ des valeurs x_i ;

On calcule la moyenne $\overline{y}$ des valeurs y_i ;

On note le point moyen le point G($\overline{x}$; $\overline{y}$).

Exercice

Le tableau ci-dessous donne les températures et les pluviométries moyennes relevées pendant cinq mois d'une année.

Température (en °C)	27	28	29	31	32
Pluviométrie (en mm)	160	140	135	90	80

Détermine le point moyen de cette série statistique.

Solution commentée

Déterminons la température moyenne $\overline{x}$ durant les cinq mois

$$\overline{x} = \frac{27+28+29+31+32}{5} = 29{,}4 .$$

Déterminons la pluviométrie moyenne $\overline{y}$ durant les cinq mois

$$\overline{y} = \frac{160+140+135+90+80}{5} = 121 .$$

Donc le point moyen est : G(29,4 ; 121).

Exercice non corrigé

Le prix de revente y_i est en millier de francs CFA d'une moto est donné en fonction du nombre x_i d'année d'utilisation.

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	280	225	180	100	98	95

Détermine le point moyen de cette série statistique double.

QUESTION 3

Comment déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés ?

Méthode

Pour déterminer une équation d'une droite d'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés, on peut procéder comme suit :

On calcule :

Les variances V(X) et V(Y) des séries simples de cette série statistique.

La covariance Cov(X,Y) de la série statistique double.

On calcule les coefficients : $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}$ dans le cas de la droite de régression de Y en X ou $a' = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)}$ dans le cas de la droite de régression de X en Y.

On détermine par la suite les ordonnées à l'origine : $b = \overline{y} - a\overline{x}$ dans le cas de la droite de régression de Y en X ou $b' = \overline{x} - a'\overline{y}$ dans le cas de la droite de régression de X en Y.

Exercice

On a interrogé 4 élèves au sujet de leur argent de poche X (en FCFA) par jour et de leurs économies Y réalisées par semaine. Les informations obtenues ont été consignés dans le tableau ci-dessous.

x_i	500	600	700	800
y_i	1000	800	1500	600

Détermine une équation de la droite de régression de Y en X et une équation de la droite de régression de X en Y par la méthode des moindres carrés.

Solution commentée

Déterminons $\overline{x}$

$$\overline{x} = \frac{500+600+700+800}{4} = 650$$

Déterminons $\overline{y}$

$$\overline{y} = \frac{1000+800+1500+600}{4} = 975$$

Déterminons V(X) et V(Y)

$$V(X) = \frac{1}{4}(500^2 + 600^2 + 700^2 + 800^2) - 650^2$$

V(X) = 12 500

$$V(Y) = \frac{1}{4}(1000^2 + 800^2 + 1500^2 + 600^2) - 975^2$$

V(Y) = 111 875

Déterminons a et a'

$$a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{6250}{12500} = \frac{125}{250} = -\frac{1}{2}$$

$$a' = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)} = \frac{6250}{111875} = -\frac{10}{179}$$

Déterminons b et b'

$$b = 975 + \frac{1}{2} \times 650 = 1300$$

$$b' = 650 + \frac{10}{179} \times 975 = 650 + \frac{9750}{179} = \frac{126100}{179}$$

Une équation de la droite (D) de régression de Y en X est : $y = -\frac{1}{2}x + 1300$

Une équation de la droite (D') de régression de X en Y est : $x = -\frac{10}{179}y + \frac{126100}{179}$

■ Exercice non corrigé

On considère la série statistique double (X,Y) déduite par le tableau suivant :

x_i	10	15	12	20
y_i	10	12	14	16

Détermine une équation de la droite de régression de Y en X puis celle de la droite de régression de X en Y en utilisant la méthode des nombres carrés.

QUESTION 4

Comment calculer le coefficient de corrélation linéaire et l'interpréter ?

Méthode 1

Pour calculer le coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double de caractère X et Y, on :

- Calcule la moyenne $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ respectives des séries X et Y.
- Calcule cov(X, Y) (*on pourra utiliser la formule* : $Cov(X,Y)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)-\overline{x}\,\overline{y}$.
- Calcule les variances respectives V(X) et V(Y) des séries statistiques X et Y
- Applique la formule : $r=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\times V(Y)}}$.

Il est possible d'utiliser un tableau pour regrouper ces différentes étapes

■ Interprétation :

Le coefficient de corrélation linéaire permet d'apprécier à la fois le sens et la force d'une dépendance

Si r = 1, alors la liaison entre les caractères X et Y est linéaire, positive et parfaite. Ainsi, la connaissance de X nous fournit la valeur de Y (et inversement)

Si r = −1, alors la liaison entre les caractères X et Y est linéaire, négative et parfaite. Ainsi, la connaissance de X nous fournit la valeur de Y (et inversement).

Si $0{,}87 \leq r \leq 1$, alors la relation linéaire entre les caractères X et Y est forte et positive. Autrement dit, à un accroissement de la valeur de X, correspond un accroissement de la valeur de Y correspondant.

Si $-1 \leq r \leq -0{,}87$, alors la relation linéaire entre les caractères X et Y est forte et négative. Autrement dit, si la valeur de X croit, la valeur de Y correspondant décroit.

■ Exercice

Les derniers recensements de la population d'une ville ont donné les résultats suivants :

Année	1993	1995	1999	2002	2004	2006	2009
Nombre d'années x_i depuis 1992	1	3	7	10	12	14	17
Population y_i (en milliers d'habitants)	4,4	4,7	4,8	4,9	5,5	5,5	5,7

Détermine le coefficient de corrélation linéaire r associé à cette série statistique double, puis interprète-le

Solution commentée

On peut construire un tableau et y regrouper les différentes étapes du calcul de r

La première colonne donne la moyenne de X

La seconde donne la moyenne de Y

La troisième colonne donne Cov (X, Y)

La quatrième colonne donne V(X)

La quatrième colonne donne V(Y)

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
1	4,4	4,4	1	19,36
3	4,7	14,1	9	22,09
7	4,8	33,6	49	23,04
10	4,9	49	100	24,01
12	5,5	66	144	30,25
14	5,5	77	196	30,25
17	5,7	96,9	289	32,49
$\sum x_i = 64$	$\sum y_i = 35{,}5$	$\sum x_i y_i = 341$	$\sum x_i^2 = 788$	$\sum y_i^2 = 181{,}49$
$\overline{x} = \frac{64}{7}$	$\overline{y} = \frac{35{,}5}{7}$	$\frac{1}{7}\sum x_i y_i = \frac{341}{7}$ $Cov\,(X,\,Y) = \frac{1}{7}\sum x_i y_i - \overline{x}.\overline{y}$ L'arrondi d'ordre 3 de Cov (X, Y) est : 2,347	$V(X) = \frac{1}{7}\sum x_i^2$ $V(X) = \frac{788}{7} - \left(\frac{64}{7}\right)^2$ L'arrondi d'ordre 3 de V(X) est : 28,980	$V(Y) = \frac{1}{7}\sum y_i^2 - \overline{y}^2$ $V(X) = \frac{181{,}49}{7} - \left(\frac{35{,}5}{7}\right)^2$ L'arrondi d'ordre 3 de V(X) est : 0,208

On a $r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}}$ soit $r = \frac{2{,}347}{\sqrt{28{,}98 \times 0{,}208}}$.

L'arrondi d'ordre 3 de r est : 0,96.

$0{,}87 \leq r \leq 1$, donc la relation linéaire entre les caractères X et Y est forte et est positive. Dans ce cas, un ajustement linéaire peut se justifier.

Exercice non corrigé

On considère 10 salariés observés à l'aide de deux variables « âge » en années (X) et du « salaire » en milliers (Y). Les informations brutes sont données dans le tableau linéaire suivant :

Ages x_i (en années)	15	20	26	34	37	43	44	50	52
Salaires y_i	600	750	740	990	820	820	1075	995	910

Détermine le coefficient de corrélation entre X et Y. Interprète le résultat obtenu.

Exercices de fixation

Série statistique double –fréquences marginales

1 Parmi les tableaux ci-dessous, indique ceux qui définissent une série statistique double.

Notes	10	11	14	16
Effectif	4	7	5	12

tableau 1

Poids (en kg)	59	74	84	89
Taille (en cm)	154	144	174	184

tableau 2

Notes	6	7	9	10
Effectif	8	6	7	5

tableau 3

Poids (en kg)	15	20	25	30
Age (en année)	7	3	12	8

tableau 4

2 On considère la série statistique double donnée par le tableau suivant :

Z \ T	14	15	16	17	18
13	2	3	5	1	2
14	1	1	2	1	3
15	4	2	1	5	2
16	3	4	3	2	1

Détermine les tableaux des fréquences marginales

3 On considère la série statistique double suivante :

X	15	20	25	30
Y	7	3	12	8

Détermine les tableaux des fréquences marginales

Nuage de points – point moyen

4 Le tableau ci-dessous donne les salaires horaires (x_i) en FCFA et le nombre mensuel de jours de travail de six employés d'une entreprise.

Salaires horaires x_i (en FCFA)	1000	1250	1450	1650	1850	2150
Nombre mensuel de jours de travail (y_i)	24	20	18	16	14	12

Représente le nuage de point de cette série statistique double.

5 Une série statistique double (X, Y) est telle que $\overline{X} = 4$ et $\overline{Y} = 6$.

Indique la lettre correspondant à la réponse exacte.

Les coordonnées du point moyen G de cette série statistique double est : a) G(6 ; 5) ; b) G(6 ; 4) ;
c) G(4 ; 5,5) ; d) G(4 ; 6) .

6 Le tableau ci-dessous indique la consommation en litre de carburant en fonction de la vitesse (vi) en km/h de quatre voitures pour parcourir une même donnée.

Vitesse V_i (en km/h)	70	90	115	145
Consommation Z_i (en L)	6	9	8	11

Calcule les coordonnées du point moyen G de cette série statistique double.

7 On considère le tableau ci-dessous indiquant le chiffre d'affaire (x_i) en million de FCFA et le bénéfice (y_i) en million de FCFA de quatre entreprises d'une zone industrielle.

Chiffre d'affaire x_i (en million de FCFA)	4	6	8	12
Bénéfice y_i (en million de FCFA)	3	2	5	4

1- Représente le nuage de points de cette série statistique dans un repère orthogonal (O, I, J).

2- a) Calcule les coordonnées du point G, point moyen du nuage de points.

b) Place le point G dans le repère (O, I, J).

Covariance

8 On considère la série statistique double suivante :

x_i	80	92	96	120	130
y_i	5	15	20	10	5

1. Calcule les coordonnées du point G, point moyen du nuage de points de cette série statistique double.
2. Calcule la covariance de cette série statistique.

9 Après une enquête menée auprès de cinq techniciens de surface d'une société, on a dressé le tableau ci-dessous indiquant leur salaire mensuel (x_i) en FCFA et le nombre de personnes à leur charge.

Salaire mensuel x_i (en FCFA)	35 000	40 000	45 000	50 000	55 000
Nombre de personnes à leur charge y_i	2	3	1	5	2

Calcule la covariance de cette série statistique double.

Droite de régression

10 Une série statistique double (X,Y) a pour point moyen le point G (6 ;9)

Une équation de la droite de régression (D) de Y en X est :

c. (D) : Y = -2X - 3 ;

d. (D) : Y = 2X - 3 ;

e. (D) : Y = 3X - 2 ;

f. (D) : Y = -3X + 2.

Indique la lettre correspondant à la réponse exacte.

11 Le président d'une coopérative de café-cacao a consigné dans le tableau ci-dessous la production (x_i) en tonne et la somme dépensée pour l'achat d'engrais (y_i) en millier de FCFA de six planteurs pendant une campagne agricole.

Production x_i (en tonne)	4	6	8	10	14	20
Somme dépensée pour l'achat d'engrais y_i (en millier de FCFA)	14	8	13	16	50	40

Détermine une équation de la droite de régression de y en x.

12 Le tableau suivant donne la durée (x_i) en heure de temps passé à regarder la télévision en une semaine et le nombre de fois (y_i) de se rendre au marigot également en une semaine de cinq habitants d'un village.

Durée x_i (en heure)	4	5	7	8	10
Nombre de fois de se rendre au marigot y_i	6	2	5	4	3

Détermine une équation de la droite de la droite de régression de x en y par la méthode des moindres carrés.

Coefficient de corrélation

13 Une série statistique double (S,T) est telle que :

Cov (S,T) = 120 , V(S) = 109 et V(T) = 225.

Le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique double est :

a) $r = 0{,}766$;

b) $r = 0{,}051$;

c) $r = 0{,}066$;

d) $r = 1{,}305$.

14 Des météorologues ont dressé le tableau suivant donnant la température maximale (T_i) en degré et le nombre de jours (J_i) où il a plu dans quatre villes de la Côte d'Ivoire au cours d'un mois.

Température T_i (en degré)	27	28	29	30
Nombre de jours de pluie J_i	5	7	6	9

Calcule le coefficient de corrélation de cette série statistique double.

EXERCICES DE RENFORCEMENT/ APPROFONDISSEMENT

15 Les chiffres d'affaires d'une entreprise de l'année 2017 à 2021 sont représentés dans le tableau ci-dessous : x_i désigne le rang de l'année et y_i le chiffre d'affaire en million de francs CFA.

Année	2017	2018	2019	2020	2021
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4
Chiffre d'affaire en million de FCFA y_i	504	580	644	∝	735

Une équation de la droite de régression (D) de Y en X est: Y = 57,3X + 516,2.

1. Calcule les coordonnées du point moyen G.
2. Déduis-en la valeur de ∝.
3. Détermine l'année à laquelle le chiffre d'affaires de l'entreprise atteindra 1 milliard quatre cent trente-trois millions de FCFA.

16

Lors d'une audition pour avoir accès à une école d'arts et d'actions culturelles, les notes sur 20 obtenues par quatre candidats aux épreuves de Musique (x_i) et de Dessin (y_i) sont indiquées dans le tableau suivant :

Musique (x_i)	∝	6	12	18
Dessin (y_i)	4	8	10	β

1. On sait que le point moyen associé à cette série statistique a pour coordonnées $\bar{x} = 10$ et $\bar{y} = 9$.

2. Détermine les notes ∝ et β respectivement obtenues par deux candidats différents en Musique de en Dessin.

Détermine le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique double. Interprète le résultat obtenu.

3. Détermine une équation de la droite de régression (D) de Y en X.

17 A la demande de mon chef de service, une sage-femme a consigné dans un tableau la masse (M_i) en kilogramme et la taille (T_i) en centimètre de dis nouveau-nés.

Masses M_i (en kg)	2,4	2,6	2,7	3	3,2	3,3	3,5	3,6	3,8	4
Taille T_i (en cm)	45	47	48	80	51	52	53	54	55	56

1. Détermine le nuage de point associé à la série (M,T) dans un repère orthogonal.

2. a) Calcule la masse moyenne $\overline{M}$.

b) Calcule la taille moyenne $\overline{T}$.

3. Détermine une équation de la droite de régression (D) de Y en X par la méthode Mayer.

4. a) Calcule le coefficient de corrélation linéaire, puis interprète ce résultat.

b) Détermine une équation de la droite de régression (D) de Y en X par la méthode des moindres carrés.

5. Sur la base de l'ajustement linéaire réalisé, calcule :

a) la taille du nouveau-né, si sa masse est de 4,7 kg

b) la masse du nouveau-né, si sa taille est de 60 cm.

18 Une jeune diplômée en attente d'un stage désire se lancer dans l'entrepreneuriat. Pour cela, elle fabrique quatre types de colliers qu'elle vend à différents prix.

Après six mois d'activités, elle dresse le tableau suivant après avoir effectué son bilan.

Type de collier	AMOUR	PAIX	UNION	COHÉSION
Prix de vente de l'unité x_i (en FCFA)	2 500	1 900	2 300	3 000
Nombre d'exemplaires vendus y_i	200	240	220	160

1. Représente le nuage de points M_i de coordonnées $(x_i ; y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra pour point d'intersection des axes tracés le point de coordonnées (1900 ; 160), puis 1 cm pour 100 FCFA sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

2. Détermine les coordonnées du point moyen G du nuage puis place-le sur la figure.

3. a) Détermine une équation de la droite de régression (D) de Y en X par la méthode des moindres carrés. (On arrondira les coefficients à 10^{-3} près)

b) Trace la droite (D) sur la figure.

4. Calcule le coefficient de corrélation puis interprète le résultat.

5. En utilisant l'ajustement linéaire réalisé, détermine le prix unitaire de vente d'un collier dont le nombre d'exemplaires vendus est 300.

19 Un exploitant forestier, spécialisé dans l'exploitation du bois "IROKO" a dressé le tableau suivant donnant la taille (x_i) en mètre et le diamètre de cinq troncs d'arbre a abattu.

Taille x_i (en mètre)	40	41	42	43	45
Diamètre y_i (en centimètre)	148	147	151	149	150

1. Détermine le point moyen G du nuage de points

2. Détermine une équation de la droite de régression (D) de Y en X par la méthode des moindres carrés.

3. Sur la base de l'ajustement linéaire ainsi réalisé, calcule :

a) le diamètre du tronc si la taille du tronc est de 47 m

b) la taille du tronc si le diamètre du tronc est de 170 cm

20 Un commerçant après l'ouverture de son magasin observe durant les 6 premiers mois le chiffre d'affaire en milliers de francs CFA. Les résultats de cette observation sont résumés dans le tableau ci-dessous où X désigne le numéro de l'année et Y le chiffre d'affaire correspondant.

X	1	2	3	4	5	6
Y	120	130	150	190	210	220

1- Détermine cov(X ; Y).

2- Détermine V(X) puis V(Y).

3- Détermine le coefficient de corrélation r entre X et Y puis interprète le résultat obtenu.

4-a) Détermine une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.

b) Détermine une équation de la droite de régression de X en Y par la méthode des moindres carrés.

5- En utilisant l'une de ces droites, détermine une estimation du chiffre d'affaire de ce commerçant au bout du 8ème mois.

21 Mme KOFFI, esthéticienne souhaite proposer à ses client(e)s plusieurs forfaits « soins du corps » comprenant dix séances. Elle fait réaliser un sondage afin de connaître le nombre de client(e)s intéressé(e)s en fonction du montant du forfait. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous

Le montant du forfait est exprimé en centaine de francs CFA.

Montant du forfait	28	30	32	35	37	40	43	46	48	51
Nombre de client(s)	47	44	40	38	35	28	25	22	17	14

Les résultats seront donnes à 10^{-2} près.

1) Représente le nuage de ces dix points associés à cette série dans un repère orthogonal (O, I, J).

On prendra : en abscisse : 1 cm pour 400 francs et en ordonnées : 1cm pour 4 clients et on prendra le point de coordonnées (20 ; 0) pour origine des axes.

2) Détermine les coordonnées du point moyen G et place G dans le repère (O, I, J).

3) Calcule V(X), V(Y), Cov(X, Y).

4) Calcule le coefficient de corrélation linéaire de cette série. Interpréte le résultat.

5) Détermine une équation de la droite de régression de Y en X de la série.

6) On admet que la tendance se prolonge jusqu'à un montant du forfait égal à 6000 francs CFA. Détermine le nombre de client(e)s intéressé(e)s par ce forfait. Arrondir le résultat à l'unité.

22 Les cadres d'une entreprise ont reçu des primes différentes selon leur ancienneté. Sept d'entre eux comparent le montant de leur prime. Leurs observations sont reportées dans le tableau ci-dessous, où l'ancienneté est exprimée en années et la prime en euros.

Cadre (i)	1	2	3	4	5	6	7
Ancienneté (x_i)	2	8	11	17	20	22	26
Primes (y_i)	270	390	460	590	650	710	830

Dans les calculs qui suivent, on donnera les résultats à 10^{-2} près.

1) Représente le nuage de points de cette série. On prendra :

- pour origine du repère le point $M_0(0 ; 250)$.
- En abscisse : 1 cm pour 2 années et en ordonnées : 1cm pour 50 euros.

2) Calcule les coordonnées du point moyen G et place-le dans le repère.

3) Justifie que V(X) = 61,92 et V(Y) = 32480,73.

4.a) Détermine le coefficient de corrélation linéaire r de la série.

b) Interpréte le résultat obtenu.

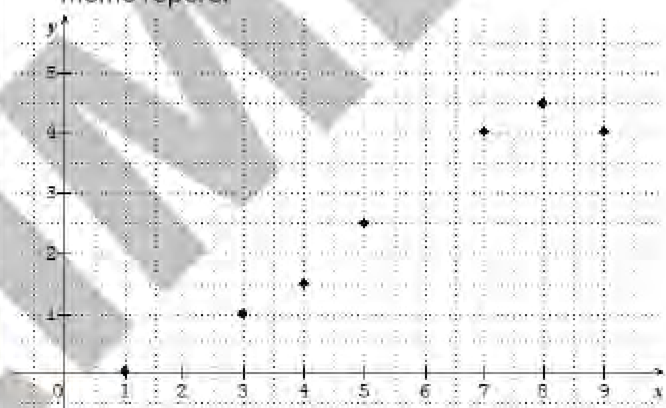
5) a) Détermine une équation de la droite (D) de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées.

b) Détermine la prime que peut obtenir un cadre ayant une ancienneté de 30 ans.

23

Le graphique ci – dessous représente le nuage de points d'une série statistique double (x, y).

1. A partir du graphique, dresse le tableau statistique de la série double (x, y).
2. Détermine les coordonnées du point moyen G.
3. Justifie qu'une équation de la droite de régression (D) de y en x par la méthode des moindres carrés est donnée par $y = 0.59x - 0.62$.
4. Place le point G et construis la droite (D) dans le même repère.



25 Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de départs à la retraite au sein d'une entreprise à effectif stable.

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
y_i	50	53	53	58	57	59	63	64

x_i désigne le rang de l'année ; y_i désigne le nombre de départs à la retraite.

1) Représente le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ associé à la série double dans un repère orthogonal ayant pour origine : le point $M_0(0 ; 50)$, et pour unités : 1 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

2) Dans cette question les résultats seront donnés à 10-2 près par défaut.

a) Détermine les coordonnées du point moyen G puis placer ce point sur le graphique.

b) Détermine le coefficient de corrélation linéaire.

c) Peut-on envisager un ajustement affine ? Justifier ?

3) a) Justifie qu'une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés est $Y = 1,96 + 50,27$.

26 La tension artérielle est une donnée médicale correspondant à la pression du sang dans les artères. On la mesure chez les patients car une tension anormale peut être le symptôme de pathologies cardiovasculaires comme l'hypertension artérielle.

La tension artérielle d'une personne comporte deux mesures :

- la Tension Artérielle Systolique (notée TAS) ;
- la Tension Artérielle Diastolique (notée TAD).

Le tableau suivant regroupe les mesures de la tension artérielle pour un groupe de personnes saines :

Âges	26	39	40	50	53	56
TAS (en mm Hg)	128	126	118	136	142	145
TAD (en mm Hg)	80	83	92	91	87	93

On s'intéresse à l'évolution de la TAS en fonction de l'âge.

Pour cela, on symbolise les données du tableau à l'aide de points de coordonnées (x;y) où x est l'âge de la personne et y sa TAS.

1-Détermine les coordonnées du point moyen G de la série statistique double (X ;Y)

2- Détermine le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique puis interprète le résultat obtenu.

27 On considère la série statistique suivante :

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	160	110	100	72	36	29	20	10	3

1) Détermine la covariance de la série statistique.

2) Détermine le coefficient de corrélation linéaire de cette série. Interprète ce coefficient de corrélation linéaire.

3) Détermine une équation de la droite d'ajustement linéaire de Y en X du nuage de points de la série par la méthode des moindres carrés.

4) Détermine une équation de la droite d'ajustement linéaire de X en Y.

28 Dans le cadre d'un recensement portant sur le nombre de travailleurs dans les champs d'hévéa, un agent a visité huit (8) exploitations. Un exploitant voudrait estimer le nombre de travailleurs que prendrait une exploitation de 16ha d'hévéa. Pour cela, l'agent recenseur a recueilli les informations consignées dans le tableau ci-dessous.

Nombre x de travailleurs	2	4	4	5	7	7	8	8
Superficie exploitée y(en ha)	3	5	6	7	10	11	8	12

1.

1. Représente le nuage de points correspondant à la série statistique double (X, Y) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On prendra sur l'axe des abscisses 1cm pour 1 travailleur et sur l'axe des ordonnées 1cm pour une superficie de 1ha.

Pour les questions 2) 3) 4) et 5), les résultats seront arrondis à l'ordre 2.

2. Justifie que le point moyen a pour coordonnées (5,63; 7,75).
3. On note V(X) la variance de X,V(Y) la variance de Y et Cov (X ; Y) la covariance de X et Y. Justifie que V(X) = 4,18 et Cov (X,Y) = 5.57.
4. a) Calcule le coefficient de corrélation linéaire r de la série (X,Y).

   b) Interprète le résultat obtenu précédemment.
5. a) Justifie qu'une équation de la droite (D) d'ajustement de X en Y par la méthode des moindres carrés est : y =1,28x +0,54.

   b) Trace(D) sur le graphique précédent.
6. Utilise l'ajustement précédent pour répondre à la préoccupation de l'exploitant.

On donnera l'arrondi d'ordre zéro du résultat.

29 Une enquête est menée auprès de cinq employés d'une entreprise pour connaitre leurs âges et leurs salaires. Les résultats de cette enquête sont consignés dans le tableau suivant :

Ages(en année)	25	30	35	40	50
Salaire(en milliers de francs CFA)	600	750	820	1075	910

1. a) Représente le nuage de points de cette série statistique.

   b) Détermine le point moyen G puis place le dans le repère.
2. Détermine la covariance de cette série statistique.
3. Calcule le coefficient de corrélation de cette série statistique puis interprète le résultat obtenu.

30 On considère la série statistique double suivante :

x	8,1	11	14,4	15,2	21,5
y	9,7	12,8	18,5	22,8	31,5

1. Représente le nuage de points $(x\ ;y)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
2. Détermine le moyennes et les écart-types de chacun des caractères x et y.

3. Détermine une équation de la droite de régression de Y en X et la construire dans le repère (O, I, J).
4. Détermine y pour $x = 23{,}2$.

31 Une enquête a été réalisée auprès de 500 ménages. Elle porte sur la relation entre le nombre d'enfants des ménages (Y) et leurs dépenses annuelles de fournitures scolaires en milliers de francs CFA (X).
L'enquête fournit les résultats suivants :

X \ Y	1	2	3
Entre 0 et 100	71	24	37
Entre 100 et 200	37	4	12
Entre 200 et 300	36	11	16

1. Établis la distribution marginale du nombre d'enfants en pourcentage.
2. Établis la distribution marginale des dépenses annuelles de fournitures.
3. a) Détermine la proportion des ménages d'un enfant.

   b) Détermine la proportion des ménages dont la dépense annuelle en fournitures scolaires est comprise entre 100 000 FCFA et 200 000 FCFA.

32 On considère la série statistique double suivante, où une valeur de y est notée α.

x	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y	13	12	14	16	α

On sait qu'une équation cartésienne de la droite de régression de Y en X est : $y = 9x + 0{,}6$.

1. Détermine la valeur de α.
2. Déduis le coefficient de corrélation linéaire.

33 Le tableau suivant indique la répartition des dépenses mensuelles moyennes alimentaires des ménages de 3 personnes ayant un enfant mineur, suivant le revenu mensuel moyen en 1989.

Revenu mensuel moyen x_i (FCFA)	39 800	60 300	79 400	100 000	151 400	251 000	398 100
Dépenses alimentaires y_i (FCFA)	30 000	37 150	41 700	45 700	55 100	70 800	87 100

On pose $t_i = \ln x_i$ et $z_i = \ln y_i$.

1. Établis le tableau donnant les valeurs de z_i en fonction des valeurs de t_i. (*ln désigne le logarithme népérien. Les résultats des calculs seront arrondis à 0,01 près*).
2. Représente le nuage de points $(t_i\ ;\ z_i)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
3. Détermine une équation de la droite de régression de Z en T par la méthode des moindres carrés.
4. Déduis du résultat précédent une relation entre x et y de la forme $y = ax^b$.
5. Détermine les dépenses mensuelles moyennes alimentaires d'un ménage de 3 personnes qui a un salaire moyen de 20 000 FCFA en 1989.

35 On considère la série statistique à 2 caractères, définie par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13
y_i	198	881	1 256	1 489	1 804	1 983	2 104	2 247	2 312	2 468	2 541	2 639

1. Représente le nuage de points (x_i, y_i).
2. Posons $x' = \ln x$, représente le nuage de points $(x'_i\ ;\ y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.
3. Détermine le coefficient de corrélation de la série double (X', Y).
4. Détermine une équation de la droite de régression de Y en fonction de X'.
5. Déduis que : $y = a\ln x + b$, où a et b sont des nombres.

36 La série statistique double suivante indique les notes mensuelles d'un élève au cours des cinq premiers mois de l'année scolaire numérotés de 1 à 5.

Mois x_i	1	2	3	4	5
Note y_i	8	9	12	12	13

1. Représente le nuage de points $(x_i\ ,\ y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
2. Détermine les coordonnées du point moyen G.
3. Détermine la moyenne et l'écart-type de chacune des deux séries X et Y.
4. a) Calcule la covariance de (X, Y) .

   b) Détermine le coefficient de corrélation linéaire de cette série double.
5. Détermine une équation de la droite de régression de Y en X et construis-la dans le plan muni du repère (O, I, J).

37 Le Tableau suivant est relatif aux voitures de petite cylindrée circulant dans une ville.
X désigne la Puissance en cv et Y désigne la durée des pneumatiques en milliers de kilomètres (centres des classes). Les fréquences données dans le tableau sont des pourcentages.

1. Donne une interprétation du nombre 7 du tableau.
2. La première et la dernière ligne ainsi que la première et la dernière colonne, définissent 2 séries statistiques dites distributions marginales.

 a) Extrais les séries marginales X et Y, puis calcule les moyennes notées $\overline{x}$ et $\overline{y}$ des séries X et Y.

x	20	25	30
Fréquence			

 b) Représente les 9 points de coordonnées $(x_i; y_i)$ dans le plan muni d'un repère (O, I, J) sans tenir compte du « poids » de chaque point.

 c) Trace une droite passant « le plus près possible» des points du graphique. On dit qu'on a ajusté une droite à l'ensemble des points. Détermine une équation de la droite (D).

3. On peut se demander si la droite tracée est bien celle qui passe « le plus près» des points connus. Une méthode appelée « méthodes des moindres carrées» nous permettra d'estimer numériquement, et de façon objective, la qualité de l'ajustement réalisée. Pour cela:

 a) Donne les coordonnées du point moyen G($\overline{x}$, $\overline{y}$).

 b) Calcule la variance V(X) de V et la variance V(Y) de Y.

 c) Calcule la covariance de (X, Y).

 d) Détermine une équation de la droite (D) de régression de Y en fonction de X.

 e) Détermine équation de la droite (D') de régression de X en fonction de Y.

4. Calcule le coefficient de corrélation linéaire. Interprète le résultat obtenu.

X \ Y	2	3	4	Total
20	0	8	30	38
25	5	20	7	32
30	25	3	2	30
Total	30	31	39	100

Situations complexes

38 Après avoir mené une campagne de sensibilisation pour lutter contre l'obésité, l'organisation non gouvernementale « LA SANTE, MA PRIORITE » décide de mener une enquête auprès de la population sensibilisée.
Il a été donc relevé la taille x_i (cm) et la masse y_i (en kg) d'un échantillon de cinq personnes de cette population.
Les relevés sont consignés dans le tableau suivant :

Taille x_i (en cm)	150	160	165	170	179
Masse (en kg)	70	55	40	60	70

Le président de l'ONG affirme que si la masse d'une personne de taille 185 cm est inférieur à 90 kg alors la campagne de sensibilisation a été une réussite.
Faisant parti de cette ONG, le président te sollicite pour estimer l'efficacité de la sensibilisation menée.
En basant ton raisonnement sur tes connaissances mathématiques, dis si oui ou non la sensibilisation a été efficace.

39 Le tableau ci-dessous donne le nombre total d'adhérents au club de mathématique en 2018.

Mois x_i de l'année 2018	1	2	3	4	5
Nombre d'adhérents y_i	1100	1160	1220	1370	1620

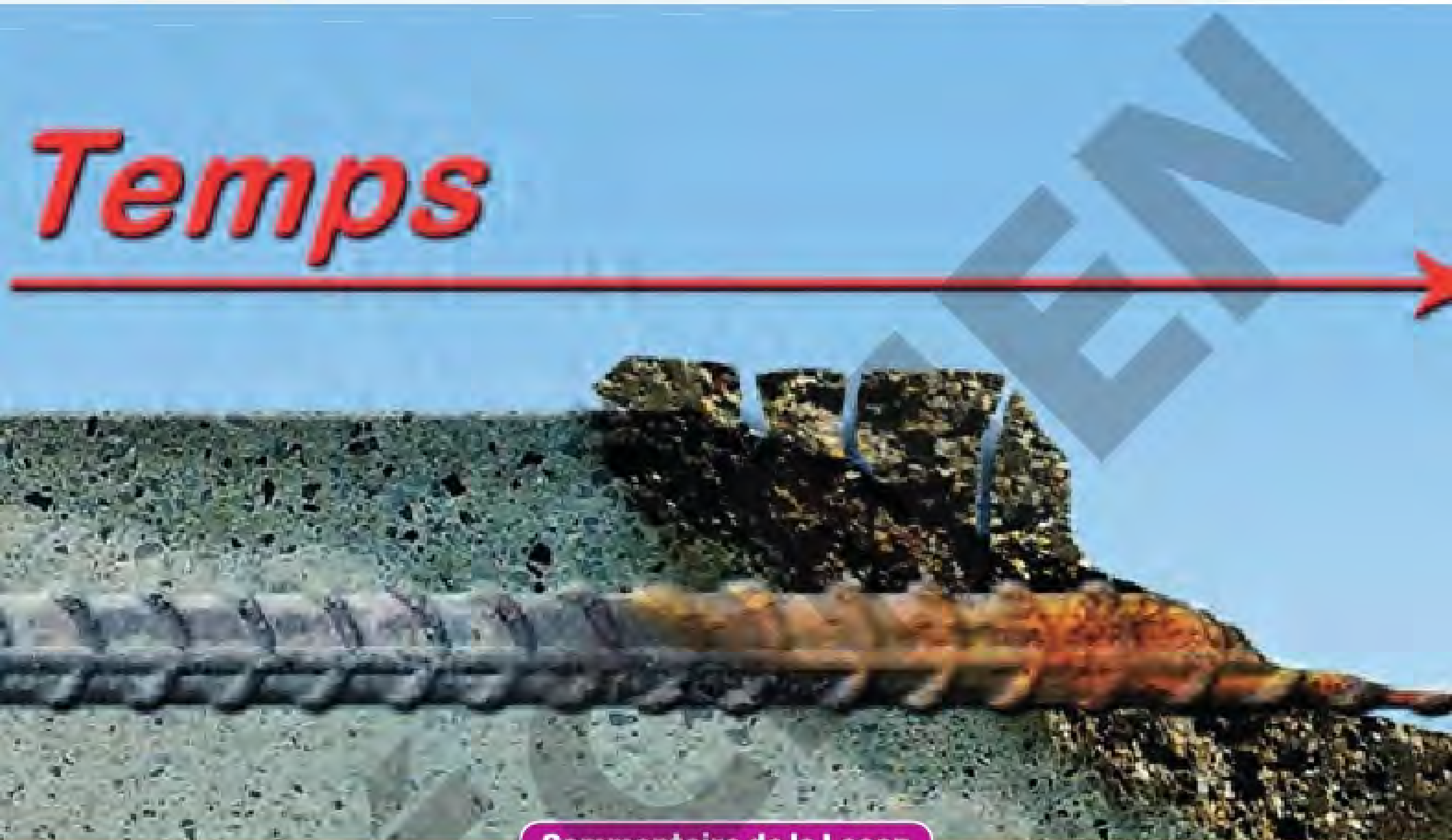
6	7	8	9	10	11	12
1550	1600	1500	1790	1940	2060	1980

Une fondation veut octroyer une aide financière au club si le nombre d'adhérents dépasse 3 000 élèves. Les élèves veulent déterminer quand ils pourront recevoir ce don.

Faisant partie de ce club, tu es sollicité par tes camarades pour déterminer la période (mois et l'année) à laquelle le club pourrait recevoir ce don.

Exploite le tableau ci-dessus pour répondre à la préoccupation des membres du club.

12 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES



Commentaire de la Leçon

L'histoire des équations différentielles est généralement liée à NEWTON et LEIBNIZ et au développement du calcul au XVIIième siècle, et à d'autres scientifiques qui vivaient à cette époque, tels que ceux appartenant à la famille BRERNOULLI.

Les équations différentielles sont apparues pour la première fois avec l'invention du calcul par NEWTON et LEIBNIZ.

La notion d'équation différentielle est nouvelle en mathématique pour les apprenants qui arrivent en classe de terminale, c'est pour cette raison qu'il faut éviter toute théorie sur les équations différentielles.

Les différents types d'équations seront introduits à partir d'exemple simple tirés de la physique, de la chimie, de la biologie, et de la vie courante. Les élèves ont probablement rencontré les équations différentielles en physique, cette leçon sera l'occasion de justifier la nature des solutions de ces équations différentielles.

Les équations différentielles sont utilisées dans plusieurs domaines de la vie. On peut citer entre autres :

La mécanique, l'électricité, l'optimisation, la radioactivité, l'étude des phénomènes vibratoires ou périodiques, l'évolution de populations interagissant avec leur environnement...

Habiletés et Contenus

- **Connaitre** la définition d'une équation différentielle ; les solutions de chaque type d'équation différentielle au programme
- **Identifier** une équation différentielle
- **Justifier** qu'une fonction est solution d'une équation différentielle
- **Résoudre** une équation différentielle du type $y' = ay$ (a réel) ; une équation différentielle du type $y' = ay + b$ (a et b réels et $a \neq 0$) ; une équation différentielle du type $y'' = 0$; une équation différentielle du type $y'' = \omega^2 y$ (réel non nul) ; une équation différentielle du type $f'' = -\omega^2 f$ (ω réel non nul)
- **Déterminer** la solution d'une équation différentielle du type $y' = ay + b$ (a et b réels) satisfaisant à une condition initiale donnée ; la solution d'une équation différentielle du type $y'' = m\,y$ (m réel) satisfaisant à des conditions initiales données.
- **Traiter une situation** faisant appel aux équations différentielles

Situation d'Apprentissage

Votre enseignant de physique-chimie vous donne les informations suivantes :
«lors de la chute d'un parachutiste, le parachute subit une force de frottement opposée à sa vitesse. On suppose que le frottement $\vec{F}$ est proportionnel à la vitesse $\vec{v}$: $\vec{F} = -km\vec{v}$ (où k est le coefficient de frottement). le principe fondamental de la mécanique établit que :
$mg - kmv = ma$ (m est la masse, v sa vitesse, a son accélération et g la constante de gravitation).
En remarquant que l'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps, on obtient l'équation : $\dfrac{dv(t)}{dt} + kv(t) = g$.
La détermination d'une fonction de vitesse $v(t)$ judicieusement choisie permettra de déterminer la position du parachutiste à tout instant t ».

Émerveillés par l'existence d'une équation qui met en relation une fonction et sa dérivée, les élèves décident de faire des recherches sur ces types d'équations.

Découverte des habiletés

Activité 1 Notion d'équation différentielle

On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x)=\dfrac{2}{x}$.

Détermine la primitive f sur $]0;+\infty[$ de g qui s'annule en e.

Récapitulons

- La primitive f à déterminer est la fonction dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ telle que :

$f'(x) = g(x)$ et $f(e) = 0$

- L'égalité $f'(x) = g(x)$ définit une équation dont l'inconnue est une fonction dont la dérivée première apparait dans l'équation. C'est une équation différentielle d'ordre 1.
- La condition : $f(e) = 0$ est appelée la condition initiale du problème.

Exercice de fixation

1 Ordonne certains de ces groupes de mots pour obtenir une définition juste.

s'appelle une équation différentielle / et des dérivées successives de l'inconnue / toute équation/ dans laquelle apparaissent l'inconnue / dont l'inconnue est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

2 Parmi les équations suivantes, recopie, celles qui sont des équations différentielles.

$2y^2 - y = 2$; $y' + 4 = 0$; $y^2 = 1$;
$y'' + 2y' + y = 5$; $5y + 3 = 0$.

Activité 2 Équation différentielles du type : $y' = ay$ (a nombre réel)

On considère l'équation différentielles (E) : $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$.

1. Justifie que la fonction dérivable f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{ax}$ est solution de (E).
2. Soit la fonction g solution de (E) et la fonction h dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-ax} g(x)$.
   a) Détermine $h'(x)$.
   b) Justifie que h est une fonction constante, puis défini $g(x)$.
3. Déduis-en toutes les solutions de (E).

Récapitulons

Toutes les solutions de l'équation différentielles $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions définies par : $f(x) = ke^{ax}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Exercice de fixation

3 Écris dans ton cahier la lettre correspondant à la bonne réponse.

L'équation différentielle $y' = 3y$ a pour solution les fonctions :

A) $x \mapsto ke^{3x}$, $k \in \mathbb{R}$; B) $x \mapsto ke^{-3x}$, $k \in \mathbb{R}$;
C) $x \mapsto 3e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$; D) $x \mapsto 3e^{-kx}$, $k \in \mathbb{R}$.

4 Écris dans ton cahier la lettre correspondant à la bonne réponse.

L'équation différentielle $y' = -2y$ a pour solution les fonctions :

A) $x \mapsto ke^{2x}$, $k \in \mathbb{R}$; B) $x \mapsto ke^{-2x}$, $k \in \mathbb{R}$;
C) $x \mapsto 2e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$; D) $x \mapsto 2e^{-kx}$, $k \in \mathbb{R}$.

Activité 3 Équation différentielle du type : $y' = ay + b$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$

On considère l'équation différentielle (F) : $y' = ay + b$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.

1. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -\dfrac{b}{a}$. Vérifie que g est solution de (F).
2. On considère une fonction f solution de (F).
   Démontre que f est solution de (F) équivaut à $f'(x) - af(x) = g'(x) - ag(x)$.
3. Démontre que la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' = ay$.
4. Déduis-en toutes les solutions de (E').
5. Détermine toute les solutions de (F).

Récapitulons

Les solutions de l'équation différentielle (F) : $y' = ay + b$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$, $(k \in \mathbb{R})$

Exercice de fixation

5 Écris dans ton cahier la lettre correspondant à la bonne réponse.

L'équation différentielle $y' = 2y + 5$ a pour solution les fonctions :

A) $x \mapsto ke^{2x} - \dfrac{5}{2}, k \in \mathbb{R}$; B) $x \mapsto ke^{-3x} - \dfrac{5}{2}, k \in \mathbb{R}$;

C) $x \mapsto ke^{2x} + \dfrac{5}{2}, k \in \mathbb{R}$; D) $x \mapsto ke^{-3x} + \dfrac{5}{2}, k \in \mathbb{R}$.

6 Écris dans ton cahier la lettre correspondant à la bonne réponse.

L'équation différentielle $y' = 4y - 24$ a pour solution les fonctions :

A) $x \mapsto ke^{2x} - 6, k \in \mathbb{R}$; B) $x \mapsto ke^{4x} - 6, k \in \mathbb{R}$;

C) $x \mapsto ke^{4x} + 6, k \in \mathbb{R}$; D) $x \mapsto ke^{-3x} + 6, k \in \mathbb{R}$.

Activité 4 Équation différentielle du type : $y'' = 0$

On considère l'équation différentielle (K) : $y'' = 0$.

1. Détermine les fonctions qui, dérivées deux fois s'annulent.
2. Démontre que toute fonction h définie par $h(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ est solution de (K).

Récapitulons

Une équation différentielle du type $y'' = 0$ est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre.
Elle a pour solution toute fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = ax + b$, avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.

Exercice de fixation

7 Écris dans ton cahier la lettre correspondant à la bonne réponse.

L'équation différentielle $y'' = 0$ a pour solution les fonctions :

A) $x \mapsto ke^{2x} + p$, $k \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$;

B) $x \mapsto kx + p$, $k \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$;

C) $x \mapsto kx^3 + p$, $k \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$.

8 Justifie que la fonction : $x \mapsto x + 8$ est une solution de l'équation différentielle $y'' = 0$.

Activité 5 Équation différentielle du type : $y'' = w^2y,\ w \in \mathbb{R}^*$

On considère l'équation différentielle (P) : $y'' = w^2y,\ w \in \mathbb{R}^*$.

1. Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par : $f(x) = e^{wx}$ et $g(x) = e^{-wx}$. Démontre que f et g sont des solutions de (P).
2. Démontre que pour tout couple $(a,\ b)$ élément de $\mathbb{R}^2$, la fonction : $x \mapsto af(x) + bg(x)$ est une solution de (P).
3. Déduis-en l'ensemble des solutions de (P).

Récapitulons

Les solutions de l'équation différentielle $y'' = w^2y,\ w \in \mathbb{R}^*$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ae^{wx} + be^{-wx},\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$.

Exercice de fixation

9 Recopie dans ton cahier la lettre correspondant à la bonne réponse.

L'équation différentielle : $y'' = 4y$ a pour solution les fonctions définies par :

A) $x \mapsto ae^{2x} - be^{2x},\ a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

B) $x \mapsto 2e^{ax} + 2e^{-bx}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

C) $x \mapsto ae^{2x} + be^{-2x},\ a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

D) $x \mapsto 2e^{ax} - 2e^{-bx}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

10 Dans chacun des cas suivants, résous l'équation différentielle (E).

(E) : $y'' - y = 0$

(E) : $y'' - 3y = 0$.

11 Dans chacun des cas suivants, résous l'équation différentielle (E).

a) (E) : $4y'' - y = 0$; b) (E) : $16y'' - 9y = 0$;
c) (E) : $4y'' - 49\,y = 0$.

Activité 6 Équation différentielle du type : $y'' = -w^2y$; $w \in \mathbb{R}$

On considère l'équation différentielle (T) : $y'' = -w^2y$.

1. Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par : $f(x) = \sin(wx)$ et $g(x) = \cos(wx)$. Justifie que f et g sont des solutions de (T).
2. Démontre que pour tout couple $(a,\ b)$ élément de $\mathbb{R}^2$, la fonction : $x \mapsto af(x) + bg(x)$ est une solution de l'équation (T).
3. Déduis-en les solutions de (T).

Récapitulons

Les solutions de l'équation différentielle du type $y'' = -w^2y,\ w \in \mathbb{R}^2$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = a\cos(wx) + b\cos(wx),\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$.

Exercice de fixation

12 Dans chacun des cas suivants, résous l'équation différentielle (E).

a) (E) : $y'' + y = 0$; b) (E) : $y'' + 4y = 0$;
c) (E) : $y'' + 9y = 0$.

13 Dans chacun des cas suivants, résous l'équation différentielle (E).

a) (E) : $4y'' + y = 0$; b) (E) : $16y'' + 9y = 0$;
c) (E) : $4y'' + 49\,y = 0$.

I. GÉNÉRALITÉ

Définition
On appelle équation différentielle, toute équation ayant pour inconnue une fonction, dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.

Exemple
Soit a, b, c des nombres réels
L'équation $ay'' + by' + cy = 0$ ou $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre.
Elle est dite linéaire parce que les exposants de $y''y'$ et y sont égaux à 1.
Elle est dite d'ordre 2 parce que l'ordre de dérivée le plus élevé de la fonction apparaissant dans l'équation est 2
Elle est dite à coefficients constants parce que les coefficients a, b et c sont des constantes.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ;2 ;3 ;4 et 5

II. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE : $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{R}$

Propriété 1
Les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle de type $y' = ay$ (a est un nombre réel) sont les fonctions : $x \mapsto Ce^{ax}$ ($C \in \mathbb{R}$).

Exemple

On considère l'équation différentielle $y' = -3y$. Déterminons les solutions de cette équation différentielle.
On a : $y' = ay$ avec $a = -3$, donc les solutions sont de la forme $y = Ce^{-3x}$ ($C \in \mathbb{R}$).

Propriété 2
Soit $(x_0 ; y_0)$ un couple de nombres réels.
L'équation différentielle $y' = a\,y$ (a est un nombre réel) admet une unique solution qui prend la valeur y_0 en x_0.

Exemple
Trouvons les solutions des équations différentielles ci-dessous vérifiant les conditions initiales en regard.
1. $3y' - 2y = 0$; $\quad y(2) = e^2$.
2. $y' - 2y = 0$; $\quad y(-1) = -3$.

On a : $3y' - 2y = 0$; la solution générale est $y = Ce^{\frac{2}{3}x}$ ($C \in \mathbb{R}$). $y(2) = e^2$ d'où $e^2 = Ce^{\frac{4}{3}}$, donc $C = e^{\frac{2}{3}}$.
Finalement : $y = e^{\frac{2}{3}(x+1)}$.
$y' - 2y = 0$; la solution générale est $y = Ce^{2x}$ ($C \in \mathbb{R}$). $y(-1) = -3$ donne $-3 = Ce^{-2}$ donc $C = -3e^2$.
Finalement : $y = -3e^{2x+2}$.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ;6 ;7 ;8 ;9 ;23 ;30 ;31 ;32 ;33 ;34 ;37 et 38

III. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE $y' = ay + b$ OÙ a ET b SONT DES NOMBRES RÉELS ET $a \neq 0$.

Propriété 1

Soit a et b deux nombres réels, où $a \neq 0$. Les fonctions solutions de l'équation différentielle de type $y' = a\,y + b$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Exemple

Déterminons les solution des équations différentielles ci-dessous :

a) $y' = 4y - \dfrac{5}{2}$; b) $3y' = 7y + 9$.

- Les solutions de l'équation différentielle $y' = 4y - \dfrac{5}{2}$ sont les fonctions f définies par : $f(x) = ke^{4x} + \dfrac{5}{2}$, ($k \in \mathbb{R}$).
- $3y' = 7y + 9$ est équivalent à $y' = \dfrac{7}{3}y + 3$, donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions f définies par : $f_k(x) = ke^{\frac{7}{3}x} - \dfrac{9}{7}$ ($k \in \mathbb{R}$).

Pour s'entraîner : Exercices 4 ;15 ;16 ;17 ;18 ;27 et 36

IV. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE : $y'' = w^2y$

1. Équation différentielle du type : $y'' = 0$

Propriété

Les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' = 0$ sont les fonctions : $x \mapsto Ax + B$ où A et B sont des nombres réels.

Exemples d'application

1. Justifions que les fonctions f et g définies par : $f(x) = 8x - 7$ et $g(x) = -\dfrac{x}{2} + 5$ sont des solutions de l'équation différentielle $y'' = 0$.

- On a : $f'(x) = 8$ et $f''(x) = 0$, donc f est une solution de l'équation différentielle $y'' = 0$.
- On a : $g'(x) = -\dfrac{1}{2}$ et $g''(x) = 0$, donc g est une solution de l'équation différentielle $y'' = 0$.

2. Trouvons les solutions des équations différentielles ci-dessous vérifiant les conditions initiales en regard.

a) $y'' = 0$; $y(-1) = 1$ et $y(1) = 3$;
b) $y'' = 0$; $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$.

a) $y'' = 0$; $y(-1) = 1$ et $y(1) = 3$, $y = ax + b$;
$y(-1) = 1$ donne $-a + b = 1$ et
$y(1) = 3$ donne $a + b = 3$. La résolution du système donne $a = 1$ et $a = 2$.
La fonction cherchée est y telle que : $y = x + 2$.
b) La fonction solution de l'équation différentielle est la fonction y, telle que $y = x$.

2. Équation différentielle du type : $y'' = w^2y$, $w \in \mathbb{R}^*$

Propriété 1

Les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' = \omega^2 y$ (ω nombre réel non nul) sont les fonctions : $x \mapsto Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$, ($A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$).

Exemple

Les solutions de l'équation différentielle y'' = 9y sont les fonctions : $x \mapsto Ae^{3x} + Be^{-3x}$ ($A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$).

Pour s'entraîner : Exercices 3 ;14 et 25

Propriété 2

Soit $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ un triplet de nombres réels.
L'équation différentielle $y'' = \omega^2 y$ (ω nombre réel non nul) admet une unique solution y dans $\mathbb{R}$, telle que : $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$.

Exemple d'application

Trouvons la solution de l'équation différentielle ci-dessous vérifiant les conditions initiales en regard : $4y'' - y = 0$; $y(0) = 3$ et $y'(0) = -3$.

Les solutions générales sont les fonctions y, telles que : $y = Ae^{\frac{x}{2}} - Be^{\frac{-x}{2}}$. ($A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$)

$y' = \frac{A}{2}e^{\frac{x}{2}} - \frac{B}{2}e^{\frac{-x}{2}}$.

On a ainsi : $A + B = 3$ et $\frac{A}{2} - \frac{B}{2} = -3$. Soit $A = -\frac{3}{2}$ et $B = \frac{9}{2}$.

En définitive : $y = \frac{-3}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{9}{2}e^{\frac{-x}{2}}$.

Pour s'entraîner : Exercices 4 ;15 ;16 ;17 ;18 ;27 et 36

V. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE $y'' = -w^2y$, $w \in \mathbb{R}^*$.

Propriété 1

Les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$ (ω nombre réel non nul) sont les fonctions : $x \mapsto A\cos \omega x + B \sin \omega x$ ($A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$).

Exemple d'application

Déterminons les solutions des équations différentielles suivantes :
a) $y'' = -4y$;
b) $y'' + \pi^2 y = 0$.

a) Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' = -4y$ sont les fonctions :
$x \mapsto A\cos 2x + B \sin 2x$ ($A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$)
b) Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \pi^2 y = 0$ sont les fonctions :
$x \mapsto A\cos \pi x + B \sin \pi x$ ($A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$)

Propriété 2

Soit $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ tout triplet de nombres réels.
L'équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$ (ω nombre réel non nul) admet une unique solution f dans $\mathbb{R}$, telle que : $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.

Exemple d'application

Déterminons la solution f de l'équation différentielle (E) : $4y'' + 49y = 0$, telle que :
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f'(0) = -\sqrt{2}$.

La solution générale de $4y'' + 49y = 0$ est f telle que : $f(x) = A\cos\frac{7}{2}x + B\sin\frac{7}{2}x$. ($A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$).

Si $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, on a $A\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + B\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$

soit $\frac{\sqrt{2}}{2}A - \frac{\sqrt{2}}{2}B = 0$.

$f(x) = A\cos\frac{7}{2}x + B\sin\frac{7}{2}x$.

$f'(x) = -\frac{7}{2}A\sin\frac{7}{2}x + \frac{7}{2}B\cos\frac{7}{2}x$;

Si $f'(0) = -\sqrt{2}$, on a : $B = \frac{-2\sqrt{2}}{7} = A$.

Finalement : $f(x) = \frac{-2\sqrt{2}}{7}\cos\frac{7}{2}x - \frac{2\sqrt{2}}{7}\sin\frac{7}{2}x$.

Pour s'entraîner : Exercices 5 ;19 ;20 ;21 ;22 ;26 ;28 ;29 et 35

QUESTION 1

Comment résoudre une équation différentielle du type : $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$?

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$ on peut procéder comme suit :
Identifier la valeur de a dans l'équation et donner la forme générale des solutions qui est :
$x \mapsto ke^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$

Exercice 1

Résous l'équation différentielle (E_1) : $y' = 5y$

Exercice 2

Résous l'équation différentielle (E_2) :
$2y' + 3y = 0$

Solution commentée

- L'équation (E_1) est du type $y' = ay$ avec $a = 5$ donc les solutions de (E_1) sont les fonctions : $x \mapsto ke^{5x}$, $k \in \mathbb{R}$.

- L'équation (E_2) est équivalente à l'équation différentielle (E'_2) : $y' = \frac{-3}{2}y$.

L'équation (E'_2) est du type $y' = ay$ avec $a = -\frac{3}{2}$ d'où les solutions sont les fonctions :
$x \mapsto ke^{-\frac{3}{2}x}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice non corrigé

Résous l'équation différentielle $3y' + 2y = 0$

QUESTION 2

Comment déterminer la solution d'une équation différentielle $y' = ay$ qui prend la valeur y_0 en x_0 ?

Méthode

Pour déterminer la solution d'une équation différentielle $y' = ay$ qui prend la valeur y_0 en x_0, on peut procéder comme suit :

- On détermine la solution générale f_k définie par : $f_k(x) = ke^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$
- On détermine la valeur de k telle que : $f_k(x_0) = y_0$

Exercice

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -3y$
Détermine la solution de (E) qui prend la valeur $\frac{1}{e^2}$ en 1.

Solution commentée

Soit l'équation différentielle (E) : $y' = -3y$
La solution générale de $y' = -3y$ est :
$f_k : x \mapsto ke^{-3x}$, $k \in \mathbb{R}$
On résout l'équation : $f_k(1) = \frac{1}{e^2}$

$f_k(1) = \frac{1}{e^2} \Leftrightarrow ke^{-3} = \frac{1}{e^2} = e^{-2}$
$\Leftrightarrow k = e.$

D'où la solution de (E) qui prend la valeur $\frac{1}{e^2}$ en 1 est la fonction f définie par : $f(x) = e^{-3x+1}$.

■ **Exercice non corrigé**

On donne l'équation (E) : $y' = 4y$

Détermine la solution de (E) qui prend la valeur 3 en -2.

QUESTION 3

Comment résoudre une équation différentielle du type : $y' = ay + b$ avec a et b réels non nuls ?

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$, on peut procéder comme suit :
Identifier les valeurs de a et b.

Donner la forme générale des solutions qui est : $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

■ **Exercice**

Résous l'équation (E) : $y' = 2y + 7$

■ **Solution commentée**

L'équation (E) est une équation différentielle du type $y' = ay$ + b avec $a = 2$ et $b = 7$.

D'où les solutions sont les fonctions f_k définies par : $f_k(x) = ke^{2x} - \frac{7}{2}$ où $k \in \mathbb{R}$.

■ **Exercice non corrigé**

On donne l'équation (E) : $y' = 4y$

Détermine la solution de (E) qui prend la valeur 3 en -2.

QUESTION 4

Comment déterminer la solution d'une équation différentielle du type $y' = ay + b$ qui prend la valeur y_0 en x_0 ?

Méthode

Pour déterminer la solution d'une équation différentielle du type $y' = ay + b$ qui prend la valeur y_0 en x_0, on peut procéder comme suit :

- on détermine la solution générale f_k par : $f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$;
- on détermine la valeur de k telle que : $f_k(x_0) = y_0$.

■ **Exercice**

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + 3$.
Détermine la solution de (E) qui prend la valeur 2 en 0.

■ **Solution commentée**

L'équation (E) a pour solution générale la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f_k(x) = ke^{-2x} - \frac{3}{2}$, $k \in \mathbb{R}$.

La solution de (E) qui prend la valeur 2 en 0 est la fonction f telle que :

$f(x) = ke^{-2x} - \frac{3}{2}$ et $f(0) = 2$;

$f(0) = 2 \Leftrightarrow k - \frac{3}{2} = 2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$;

d'où : $f : x \mapsto \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{3}{2}$.

Exercice non corrigé

Détermine la solution de l'équation $y' = 5y - 3$ qui prend la valeur $e - \frac{3}{2}$ en $\frac{-1}{5}$

QUESTION 5

Comment déterminer la solution de l'équation différentielle $y'' = 0$ qui vérifie les contions suivantes $y(x_0) = y_0$ et $y(x_1) = y_1$?

Méthode

Pour déterminer la solution de l'équation différentielle $y'' = 0$ qui vérifie les conditions $y(x_0) = y_0$ et $y(x_1) = y_1$, on peut procéder comme suit :
Déterminer la solution générale F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = ax + b$.
Déterminer les valeurs de a et b telles que : $F(x_0) = y_0$ et $F(x_1) = y_1$.

Exercice

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' = 0$.
Détermine la solution f de (E) telle que : $f(1) = -1$ et $f(2) = 1$.

Solution commentée

La solution générale de (E) est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = ax + b$ avec a et b des nombres réels.
On détermine les nombres réels a et b tels que: F (1) = -1 et F (2) = 1

F (1) = -1 et F (2) = 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ 2a+b=1 \end{cases}$

$\begin{cases} a+b=-1 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$,

donc la fonction cherchée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 3$.

Exercice non corrigé

Détermine la solution f de l'équation différentielle $y'' = 0$ telle que : $f(\frac{1}{3}) = 1$ et $f(2) = -4$.

QUESTION 6

Comment résoudre une équation différentielle du type : $y'' = my$ avec m nombre réel ?

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle du type $y'' = my$ on peut procéder comme suite

- Si $m > 0$, alors on détermine le réel positif w tel que $m = w^2$. On donne la forme générale des solutions. Les fonctions : $x \mapsto ae^{wx}+be^{-wx}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$
- Si $m < 0$, alors on détermine le réel positif w tel que $m = -w^2$. On donne la forme générale des solutions. Les fonctions : $x \mapsto a\cos(wx)+b\sin(wx)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

Exercice

Résous chacune des équations différentielles suivantes : $(E_1) : y'' = 2y$; $(E_2) : y'' = -9y$.

■ **Solution commentée**

(E_1) est de la forme : $y'' = w^2y$ avec $w = \sqrt{2}$, d'où les solutions de (E_1) sont les fonctions f telles que : $f(x) = ae^{x\sqrt{2}} + be^{-x\sqrt{2}}$ où $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

(E_2) est de la forme : $y'' = -w^2y$ où $w = \sqrt{9}$ d'où les solutions de (E_2) sont les fonctions f telles que : $f(x) = a\cos(3x) + b\sin(3x)$ où $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

■ **Exercice non corrigé**

Résous chacune des équations différentielles suivantes (E_3) : $y'' = 4y$; (E_4) : $y'' = -5y$.

QUESTION 7

Comment déterminer la solution f d'une équation différentielle du type $y'' = my$, qui vérifie $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$? ($y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$)

Méthode

Pour déterminer la solution f d'une équation différentielle du type $y'' = my$ qui vérifie $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$ on peut procéder comme suit :

- on déterminer la forme générale de la solution : soit $f : x \mapsto ae^{wx}+be^{-wx}$ (cas ou $m = w^2$) où $f : x \mapsto a\cos(wx) + b\sin(wx)$ (cas où $m = -w^2$) ;
- on détermine la valeur de a et de b telle que : $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.

■ **Exercice 1**

On considère l'équation différentielle (E_5) : $y'' = -4y$.
Détermine la solution f de (E_5) qui vérifie $f(\frac{\pi}{8}) = \frac{5}{2}$ et $f'(\frac{\pi}{8}) = -3$.

■ **Exercice 2**

On considère l'équation différentielle (E_6) : $y'' = 3y$.
Détermine la solution g de (E_6) qui vérifie $g(0) = 2$ et $g'(0) = -\sqrt{3}$.

■ **Solution commentée 1**

La solution générale est la fonction F telle que :
$F(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

Déterminons a et b tels que $F(\frac{\pi}{8}) = \frac{5}{2}$ et $F'(\frac{\pi}{8}) = -3$

$$F\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{5}{2} \Rightarrow a\cos\frac{\pi}{4} + b\sin\frac{\pi}{4} = \frac{5}{2}$$

$$a\frac{\sqrt{2}}{2} + b\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2}$$

$$F'(x) = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x$$

$$F'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -3 \Rightarrow -2a\frac{\sqrt{2}}{2} + 2b\frac{\sqrt{2}}{2} = -3$$

$$\begin{cases} a\frac{\sqrt{2}}{2} + b\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2} \\ -2a\frac{\sqrt{2}}{2} + 2b\frac{\sqrt{2}}{2} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -a + b = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } a = 2\sqrt{2}$$

d'où la solution particulière f cherchée est définie par: $f(x) = 2\sqrt{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$

$$= \sqrt{2}\left(2\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)$$

Solution commentée 2

L'équation (E_6) a pour solution général F telle que : $F(x) = ae^{\sqrt{3}x} - be^{-\sqrt{3}x}$ où $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ F(0) = $a + b$ et $F'(x) = a\sqrt{3}e^{\sqrt{3}x} - b\sqrt{3}e^{\sqrt{3}x}$

$F(0) = a + b$ et $f'(0) = a\sqrt{3} - b\sqrt{3}$.

$$\begin{cases} F(0) = 2 \\ F'(0) = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a\sqrt{3} - b\sqrt{3} = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

D'où la fonction g est définie par : $g(x) = \dfrac{1}{2}e^{\sqrt{3}x} + \dfrac{3}{2}e^{-\sqrt{3}x} = \dfrac{1}{2}(e^{\sqrt{3}x} + 3e^{-\sqrt{3}x})$.

Exercice non corrigé 1

On considère l'équation différentielle
(E_6) : $y'' = -25y$
Détermine la solution f de (E) qui vérifie :
$f(\frac{\pi}{3}) = 2$ et $f'(\frac{\pi}{3}) = 1$.

Exercice non corrigé 2

On considère l'équation (E) : $y'' = y$
Détermine la solution g de (E) qui vérifie
$g(1) = e$ et $g'(1) = 2e$.

Exercices de fixation

Justifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

1 On donne l'équation différentielle (E) : $y' = \sqrt{2}y$

Justifie que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 2e^{x\sqrt{2}}$ est une solution de (E).

2 Soit l'équation différentielle (E) : $y' = 5y + 3$
Justifie que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = 2e^{3+5x} - \frac{3}{5}$ est une solution de (E).

3 Soit l'équation différentielle (E) : $y'' = 0$
Justifie que la fonction d définie sur $\mathbb{R}$ par :
$d(x) = x\sqrt{5} + ln3$ est une solution de (E).

4 On considère l'équation différentielle (E) : $y'' = 8y$.
Justifie que la fonction h définie sur IR par :
$h(x) = 2e^{2x\sqrt{2}} - 3e^{-2x\sqrt{2}}$ est une solution de (E).

5 On considère l'équation différentielle (E) : $y'' = -169y$
Justifie que la fonction l définie sur $\mathbb{R}$ par :
$l(x) = \pi\cos 13x + \sqrt{2}\sin 13x$ est une solution de (E).

Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$

6 Résous l'équation différentielle $y' = 3y$.

7 Résous l'équation différentielle $y' = -4y$.

Détermine une solution particulière d'une équation différentielle du type $y' = ay$

8 On considère l'équation différentielle $y' = 2y$.
Détermine la solution f de cette équation différentielle qui vérifie $f(1) = e$.

9 Soit l'équation différentielle (E) : $y' = -\frac{2}{3}y$.
Détermine la solution g de (E) qui vérifie g (3) = 5.

Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$, $a \neq 0$

10 Résous l'équation différentielle $y' = 2y - 5$.

11 Résous l'équation différentielle $y' = 4y + 3$.

Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$, $a \neq 0$, vérifiant une condition

12 On considère l'équation différentielle $y' = 5y - 2$
Détermine la solution f de cette équation différentielle qui vérifie $f(0) = -\frac{2}{5}$.

13 Soit l'équation différentielle $y' = -3y + 4$.
Détermine la solution g de (E) qui vérifie $g(-\frac{1}{3}) = 1$.

Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y'' = 0$

14 On considère l'équation différentielle $y'' = 0$.
1. Détermine la solution f de (E) qui vérifie $f(1) = 3$ et $f(2) = 1$.
2. Détermine la solution g de (E) qui vérifie $g(1) = 1$ et $g(2) = 2$.
3. Détermine la solution h de (E) qui vérifie $h(-1) = 2$ et $h(5) = 2$.

Résoudre une équation différentielle de type $y'' = w^2y$

15 Résous l'équation différentielle $y'' = 4y$.

16 Résous l'équation différentielle $y'' = 5y$.

Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle de type $y'' = w^2y$

17 On considère l'équation différentielle $y'' = \frac{1}{4}y$.
Détermine la solution f qui vérifie $f(0) = 4$ et $f'(0) = 1$.

18 Soit l'équation différentielle (E) : $y'' = \frac{9}{2}y$.
Détermine la solution g de (E) qui Vérifie $g(\sqrt{2}) = 1$ et $g'(\sqrt{2}) = 0$.

Résoudre une équation différentielle de type $y'' = -w^2y$

19 Résous l'équation différentielle $y'' = -3y$.

20 Résous l'équation différentielle $y'' = -49y$.

Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle du type $y'' = -w^2y$

21 On considère l'équation différentielle $y'' = -9y$.
Détermine la solution f de cette équation différentielle qui vérifie $f(\frac{\pi}{3}) = 1$ et $f'(\frac{\pi}{3}) = -6$.

22 Soit l'équation différentielle (E) : $y'' = -y$.
Détermine la solution g de (E) qui vérifie $g(\frac{\pi}{6}) = 1$ et $g'(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$.

Exercices de renforcement / Exercices d'approfondissement

23 On considère l'équation (E) d'inconnue y une fonction de dérivé y' telle que : $3y' + 2y = 0$.

1. Justifie que (E) est une équation différentielle de type $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{R}$.
2. Déduis-en les solutions de (E).
3. Détermine la solution de (E) dont la représentation graphique passe par le point de coordonnées (0 ;2).

24 On considère l'équation (E) d'inconnue y une fonction de dérivée y' telle que : $4y' - 3y + 8 = 0$

1. Justifie que (E) est une équation différentielle du type $y' = ay + b$.
2. Déduis-en les solutions de (E).
3. Détermine la solution g de (E) telle que le nombre dérivé de g en 0 est 4.

25 On considère l'équation différentielle (E) : $y'' = 0$.

Détermine la solution h de (E) dont la représentation graphique passe par le point A (3 ; 0) et n'a aucun point commun avec la droite (D) d'équation $2x + 3y + 1 = 0$.

26 On considère l'équation (E) d'inconnue y une fonction de dérivée seconde y'' telle que : $\frac{1}{15}y'' + \frac{5}{3}y = 0$.

1. Justifie que l'équation (E) est une équation différentielle du type $y'' = -w^2y$.
2. Déduis-en les solutions de (E).
3. Détermine la solution f de (E) telle que la représentation graphique de f admet une tangente de coefficient directeur 5 au point A $(\frac{\pi}{15};3)$.

27 On considère l'équation (E) d'inconnue y une fonction de dérivée seconde y'' telle que : $4y''-9y=0$.

1. Justifie que l'équation (E) est une équation différentielle du type $y'' = w^2y$.

2. Déduis-en les solutions de (E).

3. Détermine la solution f de (E) telle que la représentation graphique de f admet une tangente au point B (0 ; 2) perpendiculaire à la droite (D) d'équation $x - 2y - 10 = 0$.

28 Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

(E) : $3y'' + 12y = 0$.

1. Détermine $f'(x)$, f étant une solution de (E).
2. Détermine la solution f de (E) vérifiant les conditions initiale : $f(\frac{\pi}{4}) = 2$ et $f'(\frac{\pi}{4}) = -1$.

29 Soit l'équation différentielle (E) : $4y'' + 9y = 0$, où y est une fonction de variable t et y'' sa dérivée seconde.

1. Résous l'équation différentielle (E).
2. Soit f une fonction qui est une solution de l'équation différentielle (E).

La courbe représentative de f passe par le point de coordonnées (0; 1) et admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{\pi}{6}$.

a) Donne les conditions initiales sur la fonction f à partir des informations données sur la courbe.

b) Détermine l'expression de la fonction f.

3. Vérifie que, pour tout réel t, $f(t) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$.

30 On considère l'équation différentielle (E) :
$y' - 2y = e^{2x}$.

1. Démontre que la fonction $g : x \mapsto xe^{2x}$ est solution de (E).
2. Résous l'équation (G) : $y' = 2y$.
3. Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de (G).
4. Déduis les fonctions solutions de l'équation (E).
5. Détermine la solution de l'équation qui s'annule en 1.

31 Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Résoudre l'équation différentielle : (1) $y' - \frac{1}{n}y = 0$.
2. On considère l'équation différentielle

(2) : $y' - \frac{1}{n}y = -\frac{x+1}{n(n+1)}$.

Détermine deux réels a et b, tels que la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit solution de (2).

3. a) Démontre que, pour qu'une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ soit solution de (2), il faut et il suffit que $h - g$ soit solution de (1).

b) Déduis-en toutes les solutions de (2).

32 On considère l'équation différentielle

(E) : $y' = 2y + \cos x$

1. Détermine les nombres réels a et b pour que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = a\cos x + b\sin x$ soit une solution de (E).

2. Résous l'équation (E_0) : $y' = 2y$.
3. Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - u$ est solution de (E_0).
4. Déduis-en les solutions de l'équation de (E).
5. Détermine la solution de (E) qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$.

33 On considère l'équation différentielle (E) :

$2y' + 6y = 2x^2 - 6x + 8$.

1. Détermine les nombres réels a, b et c pour que la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par : $v(x) = ax^2 + bx + c$ soit une solution de (E).
2. Résous l'équation (E_0) : $2y' + 6y = 0$.
3. Démontre qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si $g - v$ est une solution de l'équation (E_0).
4. Déduis-en les solutions de l'équation (E).
5. Détermine la solution de (E) dont la représentation graphique passe par l'origine du repère.

34 On désigne par $q(t)$ la température (exprimée en degré Celsius) d'un corps à l'instant t (exprimée en heure). A l'instant $t = 0$, ce corps dont la température est de 800 c est placé dans une salle à 150c.

D'après la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement $q'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température du corps et celle de la salle. On suppose que le coefficient de refroidissement est -2.

1. Justifie que : $q'(t) = -2q(t) + 30$.
2. Déduis-en l'expression de $q(t)$ vérifiant les conditions initiales.
3. Détermine la température du corps au bout de 30 min. Donne la valeur arrondie à l'unité.
4. Détermine le temps au bout duquel la température du corps tombera à 45^0. Donne le temps en minutes et en secondes.
5. a) Calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} q(t)$.

   b) Donne une interprétation du résultat.

35 On considère l'équation (E) d'inconnue y une fonction de dérivée second y'' telle que : $y'' + \frac{\pi^2}{9} y = 0$

1. Justifie que (E) est une équation différentielle de type $y'' = -w^2 y$.
2. Déduis-en les solutions de (E).
3. a) Détermine la solution f de (E) telle que : $f(3) = -3$ et $f'(3) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

   b) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

36 On considère l'équation (E) d'inconnue y une fonction de dérivée seconde y'' : $\frac{1}{3} y'' - 12y - e^{2x} + x - 2 = 0$.

1. Justifie que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par : $\frac{3}{32} e^{2x} + \frac{1}{12} x - \frac{1}{6}$ est une solution de (E).
2. On pose (E_0) l'équation : $\frac{1}{3} y'' - 12y = 0$.

   a) Justifie que (E_0) est une équation différentielle du type $y'' = w^2 y$.

   b) Déduis-en les solutions de l'équation (E_0).
3. Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction f - P est solution de (E_0)
4. Déduis-en les solutions de l'équation de (E).
5. On munit le plan d'un repère orthonormé (O, I, J). Détermine la solution h de (E) dont la représentation graphique admet une tangente en le point J de coefficient directeur $\frac{4}{3}$.

37 Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (engl^{-1}) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie, sur $\mathbb{R}^+$, l'équation différentielle

(E) : $y' + y = \alpha e^{-t}$ où t (exprimé en heures) est le temps écoulé après la consommation, et α une constante qui dépend des conditions expérimentales

1. On pose, pour tout nombre réel strictement positif t, $g(t) = f(t).e^t$. Démontre que g est une fonction affirme.
2. Exprime $f(t)$ en fonction de t et de α.
3. Dans cette question, on suppose que : $\alpha = 4$
4. a) Etudie les variations de f , dresse son tableau de variations et trace sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 2,5cm.

   b) Détermine le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.

   c) Détermine graphiquement la période au bout de laquelle le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur ou égal à $0{,}9 g.l^{-1}$

38 Une substance se dissout dans l'eau.

On admet que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute. A l'instant $t = 0$ (t en minutes), on place 50 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau.

Sachant que les vingt premiers grammes se dissolvent en dix minutes, donne une expression de la quantité dissoute f(t), en gramme, en fonction de t.

Situations complexes

39 Des élèves de terminale étudient le refroidissement d'un objet porté à 100°C dans un milieu ambiant de 10°C. L'étude consiste à déterminer le temps de refroidissement de l'objet; c'est-à-dire le nombre de minutes qu'il faut pour que la température de l'objet passe en dessous de 15°C.
On note $\theta(t)$ la différence, à l'instant t, entre la température de l'objet et celle du milieu ambiant. t est exprimé en minutes et $\theta(t)$ en degrés Celsius (°C).

L'étude du phénomène physique conduit à l'équation différentielle (E) : $\theta'(t) = -\theta(t)\ln 3$.

Les élèves effectuent un contrôle de la température de l'objet après chaque minute (le premier contrôle ayant lieu à l'instant t = 1). Trouvant le contôle minute par minute fastidieux, les élève te sollicite pour les aider.

En utilisant tes connaissances en mathématique, détermine le nombre de minutes qu'il faudra pour que la température de l'objet passe en dessous de 15°C.

Format de l'épreuve de maths

série D

L'épreuve comporte six (6) exercices et évalue les trois (3) compétences de la classe de Terminale D.

EXERCICE 1 : Test objectif (niveaux de taxonomie 1 ou 2).
EXERCICE 2 : Test objectif (niveaux de taxonomie 1, 2 ou 3).
EXERCICE 3 : Exercice de renforcement en test subjectif
EXERCICE 4 : Exercice d'approfondissement en test subjectif.
EXERCICE 5 : Exercice d'approfondissement en test subjectif.
EXERCICE 6 : Situation complexe.

Commentaires

- ✓ Un exercice de renforcement porte sur plusieurs habiletés d'une même leçon.
- ✓ Un exercice d'approfondissement porte sur plusieurs habiletés de plusieurs leçons.
- ✓ Les exercices de renforcement et d'approfondissement ne doivent pas être contextualisés.
- ✓ Un exercice peut porter sur plusieurs compétences.
- ✓ Les exercices 3, 4, 5 et 6 couvriront les trois (3) compétences au programme.
- ✓ Les tests objectifs porteront sur des leçons qui n'auront pas été prises en compte par les exercices 3, 4, 5 et 6.

Distribution des leçons selon les compétences et les thèmes

Compétences	**Thèmes**	**Leçons**
Compétence 3	Géométrie du plan	Leçon 1 : Nombres complexes et géométrie du plan
Compétence 1	Thème 1 : Calculs algébriques	Leçon 1 : Nombres complexes
	Thème 2 : Fonctions	Leçon 1 : Limites et continuité Leçon 2 : Dérivabilité et étude de fonctions Leçon 3 : Primitives Leçon 4: Fonctions logarithmes Leçon 5: Fonctions exponentielles, fonctions puissances Leçon 6 : Calcul Intégral Leçon 7 : Suites Numériques Leçon 8 : Équations différentielles
Compétence 2	Thème 1 : Modélisation d'un phénomène aléatoire	Leçon 1 : Probabilité conditionnelle et variable aléatoire
	Thème 2 : organisation et traitement des données	Leçon 1 : Statistiques à deux variables

Attribution des points par exercices

Exercice 1 (test objectif)	04 pts
Exercice 2 (test objectif)	
Exercice 3 (renforcement)	11 pts
Exercice 4 (approfondissement)	
Exercice 5 (approfondissement)	
Exercice 6 (situation complexe)	05 pts

SUJET 1

Exemple d'épreuve de Mathématiques – Série D

Cette épreuve comporte trois (3) pages
Chaque candidat recevra une (1) feuille de papier millimétré. Tout modèle de calculatrice scientifique non graphique est autorisé

Durée : 4 heures
Coefficient : 4

Exercice 1 (2 points)

Écris le numéro de chaque énoncé suivi de Vrai si l'énoncé est vrai ou de Faux si l'énoncé est faux.

N°	Énoncés
1	$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 1$.
2	f désigne une fonction numérique non définie en un point a. Si la limite à gauche de f en a est égale à la limite à droite de f en a, alors f possède une limite au point a.
3	La fonction : $x \longmapsto 2\sin x - \cos 3x + \pi$ est une primitive de la fonction : $x \longmapsto 2\cos x + 3\sin 3x$.
4	On appelle écart-type d'une série statistique X, le carré de la variance de X.

Exercice 2 (2 points)

Pour chacune des énoncés ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont données dont une seule est juste. Écris sur ta feuille de copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Énoncés	Réponses	
1	f est la fonction définie par : $f(x) = e^{\tan 2x}$	A	$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4e^{\sqrt{3}}$.
		B	$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\sqrt{3}}$.
		C	$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{\sqrt{3}}$.
		D	$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 8e^{\sqrt{3}}$.
2	Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y = 0$ sont les fonctions :	A	$x \longmapsto k + e^{-2x}$ ($k \in \mathbb{R}$).
		B	$x \longmapsto \mathrm{B}e^{2x} + \mathrm{A}e^{-2x}$ ($\mathrm{A} \in \mathbb{R}$; $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$).
		C	$x \longmapsto \mathrm{A}\cos 2x + \mathrm{B}\sin 2x$ ($\mathrm{A} \in \mathbb{R}$; $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$).
		D	$x \longmapsto (\mathrm{A}\sin 2x + \mathrm{B}\cos 2x)e^{2x}$ ($\mathrm{A} \in \mathbb{R}$; $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$).

3	Soit G la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $G(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\lvert\sin t\rvert\,dt$. On suppose que G est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.	A	$\forall\, x\in\,]0\,;+\infty[\,,\ G'(x)=\lvert\sin\sqrt{x}\rvert$.
		B	$\forall\, x\in\,]0\,;+\infty[,\ G'(x)=\sqrt{x}\lvert\sin\sqrt{x}\rvert$.
		C	$\forall\, x\in\,]0\,;+\infty[,\ G'(x)=\dfrac{\lvert\sin\sqrt{x}\rvert}{2\sqrt{x}}$.
		D	$\forall\, x\in\,]0\,;+\infty[,\ G'(x)=\dfrac{\lvert\sin x\rvert}{2\sqrt{x}}$.
4	Soit (u) la suite numérique définie par : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n=-\dfrac{\left(\frac{5}{6}\right)^n}{3}$.	A	La suite (u) est croissante.
		B	La suite (u) diverge vers $-\infty$.
		C	La suite (u) est décroissante.
		D	La suite (u) diverge vers $+\infty$.

<u>Exercice 3</u> (4 points)

Dans une population d'une région, la probabilité d'être un fumeur est de 0,52. On sait d'autre part que dans cette population, 30% des fumeurs et 10% des non fumeurs présentent un test positif à la COVID-19.

1. Détermine la probabilité pour un individu de cette population d'être testé négatif à la COVID-19 sachant que cet individu est un fumeur.
2. Détermine la probabilité pour un individu de cette population d'être testé positif à la COVID-19 sachant que cet individu est un non fumeur.
3. Détermine la probabilité pour qu'un individu de cette population soit un fumeur testé positif à la COVID-19.
4. Détermine la probabilité pour qu'un individu de cette population soit un non fumeur testé positif à la COVID-19.
5. Déduis des questions 3 et 4, que la probabilité pour qu'un individu de cette population soit testé positif à la COVID-19 est de 0,204.
6. Détermine la probabilité pour un individu d'être un fumeur sachant qu'il a été testé positif à la COVID-19.

<u>Exercice 4</u> (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I , J). (*On prendra 2 cm comme unité graphique.*)
On considère les nombres complexes a, b, et c, tels que : $a=-1+i$; $b=3(1+i)$ et $c=2$.

1. Écris chacun des nombres a, b, et c sous forme trigonométrique.
2. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c.
   a) Place les points A, B et C dans le repère (O, I, J).
   b) Justifie que ABC est un triangle rectangle et isocèle.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', tel que :
$z'=2iz+1-2i$.

3. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.
4. Détermine les affixes des points A' et B', tels que : A' = f(A) et B' = f(B).
5. Détermine $\dfrac{A'B'}{AB}$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}}\right)$.
6. Soit g la similitude directe de centre A qui applique le point C sur le point B.
   On pose : I' = g(I). (*I est le point d'affixe 1.*)
   Détermine l'affixe du point I'.

Exercice 5 **(4 points)**

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.

1. Justifie que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.
2. Détermine la limite de f à droite en 0.
3. Interprète chacun des résultats précédents.

On suppose que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$

4. Démontre que : $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{(2-\ln x)\sqrt{x}}{2x^2}$.
5. Étudie les variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
6. Dresse le tableau de variation de la fonction f.
7. Construis la courbe (C_f) sur $]0\,;+\infty[$ et ses asymptotes.
8. Justifie que l'équation $f(x)=-5$ admet sur $]0\,;+\infty[$, une solution unique α, telle que : $0{,}4<\alpha<0{,}6$.

Exercice 6 **(5 points)**

Tu accompagnes ton petit frère à l'hôpital. Il doit recevoir de son médecin une dose de chacun de deux médicaments A et B.

Après avoir administré au patient une dose initiale du médicament A, le médecin vous informe que le médicament B ne peut être administré que si la quantité du médicament A, présent dans le sang du patient est inférieure à 75% de la dose initiale.

Ayant un autre rendez-vous 3 heures après l'administration du médicament A, ton petit frère estime qu'il pourra recevoir sa dose du médicament B avant l'heure de son rendez-vous.

En utilisant les données ci-dessous, et en basant ton argumentation sur tes connaissances mathématiques, vérifie l'affirmation de ton petit frère.

***Données** : la quantité de médicament f(t) (exprimé en cm^3) contenue dans le sang après un temps t (exprimé en heures) est donnée par la formule :* $f(t)=2e^{\frac{-t}{12}}$.

La dose initiale correspond à f(0).

SUJET 2

Exemple d'épreuve de Mathématiques – Série D

Cette épreuve comporte trois (3) pages
Chaque candidat recevra une (1) feuille de papier millimétré. Tout modèle de calculatrice scientifique non graphique est autorisé

Durée : 4 heures
Coefficient : 4

Exercice 1 (2 points)

Écris le numéro de chaque énoncé suivi de Vrai si l'énoncé est vrai ou de Faux si l'énoncé est faux.

N°	Énoncés
1	La fonction : $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et a pour dérivée la fonction : $x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{x}$.
2	f désigne une fonction numérique telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J). Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OI), en $+\infty$.
3	Une primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{(\cos x)^2} - \cos x$ sur $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ est la fonction : $x \longmapsto \tan x - \sin x + \frac{\pi}{2}$.
4	Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $+\infty$.

Exercice 2 (2 points)

Pour chacune des énoncés ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont données dont une seule est juste.
Écris sur ta feuille de copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Énoncés	Réponses	
1.	Le plus petit entier naturel n, tel que : $1-\left(\frac{1}{3}\right)^n > 0{,}95$ est :	A	2.
		B	4.
		C	3.
		D	5.
2.	Les solutions de l'équation différentielle $y'' = -y$ sont les fonctions :	A	$x \longmapsto k + e^{-2x}$ $(k \in \mathbb{R})$.
		B	$x \longmapsto Ae^{x} + Be^{-2x}$ $(A \in \mathbb{R}\,;B \in \mathbb{R})$.
		C	$x \longmapsto B\cos x + A\sin x$ $(A \in \mathbb{R}\,;B \in \mathbb{R})$.
		D	$x \longmapsto (Ax + B)e^{x}$ $(A \in \mathbb{R}\,;B \in \mathbb{R})$.

3.	Dans un hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Chaque fois qu'un client s'intéresse à un ordinateur de ce modèle, la probabilité pour qu'il l'achète est égale à 0,3. On considère un échantillon aléatoire de 10 clients qui se sont intéressés à ce modèle. La probabilité qu'exactement trois d'entre eux aient acheté l'ordinateur a pour valeur arrondie au millième :	A	0,900.
		B	0,092.
		C	0,002.
		D	0,267.
4.	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\ln\frac{2}{3}} =$	A	$-\infty$.
		B	0.
		C	$+\infty$.
		D	1.

Exercice 3 (3 points)

Le tableau ci-dessous donne l'âge X et la moyenne Y des maxima de tension artérielle en fonction de l'âge d'une population féminine.

X	36	42	48	54	60	66
Y	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1

1. Représente graphiquement le nuage de points dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). (0,5 cm pour 1 an et 3 cm pour l'unité de tension artérielle).
2. Calcule la moyenne et la variance des séries statistiques associées aux caractères X et Y.
3. a) Détermine une équation de la droite de régression de Y en fonction de X.
   b) Détermine une équation de la droite de régression de X en fonction de Y.
   c) Représente ces deux droites sur le même graphique que celui utilisé pour le nuage de points.
4. Détermine le coefficient de corrélation linéaire.
5. En te basant sur ces données, dis si une femme de 70 ans qui a une tension artérielle maximale de 16,2 a oui ou non une tension normale.

Exercice 4 (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 3 cm.

On considère les points B et D d'affixes respectives : $z_B = \sqrt{3} + i$ et $z_D = \sqrt{3} - i$.

1. Place les points B et D.
2. Justifie que ODB est un triangle équilatéral.
3. Soit E le point d'affixe z_E tel que : $z_E = e^{\frac{-i\pi}{3}}$. r désigne la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $t_{2\overrightarrow{OJ}}$ la translation de vecteur $2\overrightarrow{OJ}$.

On pose : A = r(E) et C = $t_{2\overrightarrow{OJ}}$ (E).

a) Justifie que l'affixe z_A du point A est : $z_A = e^{\frac{i\pi}{6}}$.
b) Détermine l'affixe z_C du point C.
c) Justifie que A est le milieu du segment [OB].

On pose : $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

a) Détermine un argument du nombre complexe Z.
b) Déduis-en que la droite (CD) est la médiatrice du segment [OB].

Exercice 5 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 1 cm.
I) Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(t) = t - \ln t$.

1. a) Détermine la limite de g en 0 et interprète ce résultat.
   b) Détermine la limite de g en $+\infty$.
   On suppose que g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
2. a) Étudie le sens de variation de la fonction g et dresse son tableau de variation.
   b) Déduis de la question 2.a) que ; $\forall\, t \in\,]0\,;+\infty[$, $g(t) \geq 1$.

II) On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \int_1^x \frac{t}{g(t)}dt$.

1. Justifie que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. Étudie selon les valeurs de x le signe de $f(x)$.
3. Détermine $f'(x)$ pour tout x élément de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
4. Étudie le sens de variation de f *(On ne déterminera pas de limite pour la fonction f)*.
5. Justifie que : $\forall\, t \in\,]0\,;1]$, $\frac{t}{g(t)} \leq t$.
6. Déduis-en que : $\forall\, x \in\,]0\,;1]$, $\frac{x^2-1}{2} \leq f(x) \leq 0$ et que f admet une limite finie L en 0.
7. Justifie que : $\forall\, t \in [1\,;+\infty[$, $\frac{t}{g(t)} \geq 1$.
8. Déduis de la question précédente, la limite de f en $+\infty$.

Exercice 6 (5 points)

Une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'objets. Chaque objet est vendu à 100 (en milliers de francs CFA). Le coût de production unitaire noté $U(x)$ exprime le coût de production par objet produit.

Un expert a déterminé qu'il est égal à : $U(x) = x - 10 + \frac{900}{x}$, où x est un élément de l'intervalle $[10\,;100]$.

Conscient de la baisse du bénéfice réalisé par l'entreprise, le Directeur convoque une réunion des actionnaires et émet deux préoccupations au cours de cette réunion :

1. *Comment déterminer le nombre d'objet à fabriquer pour minimiser le coût de production unitaire et quel sera le bénéfice de l'entreprise dans ce cas ?*
2. *Comment déterminer le nombre d'objets à fabriquer pour avoir un bénéfice maximum et quel sera le bénéfice de l'entreprise dans cet autre cas ?*

De retour à la maison, ton Papa, actionnaire de l'entreprise te soumet les deux préoccupations du Directeur. Réponds à chacune de ces préoccupations, en basant ton argumentation sur tes connaissances mathématiques.

FORMULAIRE DE RÉVISION

1 COMBINATOIRE - DÉNOMBREMENTS

Card (A∪B) = Card A + Card B − Card (A∩B).
Card (A×B) = Card A × Card B.

Soit E un ensemble de n éléments.

Nombre de permutations de E :

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$; $0! = 1$.

Nombre d'arrangements de p éléments de E :

$A_n^p = n(n-1)...(n-p+1)$, $1 \leq p \leq n$.

Nombre de sous-ensembles de p éléments de E :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

$$C_n^p = C_n^{n-p} \quad ; \quad C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1} \quad (p \leq n).$$

2 PROBABILITÉS

Ω est l'univers d'une expérience aléatoire.

Si A et B sont incompatibles : P(A∪B) = P(A) + P(B).

Dans le cas général :

P(A∪B) = P(A) + P(B) − p(A∩B)

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$.

Si $A_1, ..., A_n$ forment une partition de A,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{Card\ A}{Card\ \Omega}$.

Probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé

P(A∩B) = P(A|B) × P(B) ; P(A|B) se note aussi $P_B(A)$ Cas où A et B sont indépendants :

P(A∩B) = P(A) × P(B).

Formule des probabilités totales

B_1 ; B_2 ; …, B_n sont des évènements de probabilité non nulle d'un univers Ω.

Si les événements $B_1, B_2, ..., B_n$ forment une partition de Ω, alors pour tout événement A

$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_n)$

Variable aléatoire

Fonction de répartition: $F(x) = P(X \leq x)$.

Espérance mathématique: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$.

Variance: $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$.

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2.$$

Écart-type : $\sigma_x = \sqrt{V(X)}$.

3 CALCULS ALGÉBRIQUES DANS ℂ

• **A. Nombres complexes**

Forme algébrique: $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Forme trigonométrique et exponentielle :

$z = \rho\ (\cos\theta + i \sin\theta) = \rho e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\rho \in \mathbb{R}^{*+}$

$$\overline{OM} = x\vec{u} + y\vec{u}$$
$$\overline{OP} = x = \text{Re}(z) = \rho\cos\theta$$
$$\overline{OQ} = y = \text{Im}(z) = \rho\sin\theta$$
$$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Opérations algébriques

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i\ (y + y')$
$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i\ (xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\overline{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$.

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad ; \quad y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad ; \quad \overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$$

$$z\,\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta}.$$

Module et argument d'un produit, d'un quotient, d'une puissance

$zz' = (\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z|\ |z'|$ et arg (zz') = arg (z) − arg (z') + $2k\pi$

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$$

$$\frac{|z|}{|z'|} = \left|\frac{z}{z'}\right| \text{ et arg } \frac{z}{z'} = \text{arg } (z) + \text{arg } (z') + 2k\pi$$

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}.$$

Inégalité triangulaire

$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$

• B. Égalités remarquables

(Valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

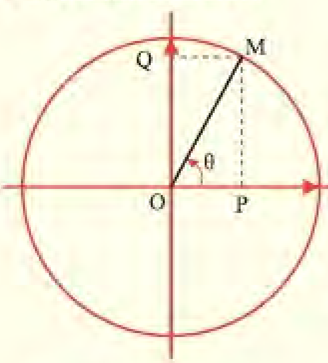
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + b^n$;

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$; $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

• C. Trigonométrie



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,$

$k \in \mathbb{Z}$

Formules d'Euler

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$; $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

Formules d'addition

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2a)$; $\sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a)$.

Formules de transformation

$\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$

$\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$

$\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$

$\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$

$\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formule de Moivre et applications

Pour tout entier naturel non nul n : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Soit encore $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.

Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

$u_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, où $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Les solutions de $z^n = a$, où $a = \rho e^{i\alpha}$, sont $z_k = z_0 u_k$ où

$z_0 = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha}{n}}$.

• D. Équation du second degré

(Soit a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.
L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$, $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

• **E. Suites arithmétiques, suites géométriques**

(Formules valables sur C et donc sur $\mathbb{R}$.)

Suites arithmétiques

✓ Par une formule de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$ (r est la raison).

✓ Par une formule explicite : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n - p)r$.

✓ Somme de termes consécutifs

nombre de termes $\times \dfrac{\text{Premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$.

✓ On écrit aussi :

$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \dfrac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$.

✓ Cas particulier : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Suites géométriques

✓ Par une formule de récurrence : $v_{n+1} = q \times v_n$ (q est la raison).

✓ Par une formule explicite : $v_n = q^n \times v_0$ ou $v_n = q^{(n-p)} \times v_p$.

✓ Somme de termes consécutifs

premier terme $\times \dfrac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$ $(q \neq 1)$.

✓ On écrit aussi : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

$= v_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

✓ Cas particulier : $1 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$.

4 FONCTIONS

• **A. Propriétés algébriques des fonctions usuelles**

1. Fonctions logarithmes et exponentielles

$\ln x = \int_1^x \dfrac{dt}{t}$ $(x > 0)$

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

Pour $a > 0$ et $b > 0$:

$\ln ab = \ln a + \ln b$.

$\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

$\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

$\ln a^x = x \ln a$.

$e^0 = 1$.

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.

$a^x = e^{x\ln a}$ $(a > 0)$.

$(e^a)^b = e^{ab}$.

Si $x \in]-\infty ; +\infty[$ et $y \in]0 ; +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$ $\qquad x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ $\qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

$x^0 = 1$ si $x \neq 0$

si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0;+\infty[$ et $y \in [0;+\infty[$, alors $y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$.

• **B. Limites usuelles de fonctions et de suites**

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$.

Croissances comparées à l'infini

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad ; \quad \text{si } \alpha > 0,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \quad ; \quad \text{si } \alpha > 0,\ \lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad ; \quad \text{si } \alpha > 0,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

Comportement à l'origine de ln x, x^α

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty.$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^\alpha = +\infty$.

Comportement à l'origine de :
***ln* (1 + *x*), e^x , *sin x*, $(1+x)^a$**

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \quad ; \quad \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Croissances comparées à l'origine

$\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0.$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0.$

2. Suites

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$. Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$.

Si $\alpha > 0$, et $a > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$.

Si $a > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$. Si $0 < a < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.

• C. Dérivées et primitives

(Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

f(x)	*f '(x)*	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty ; +\infty[$
x	1	$]-\infty ; +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty ; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
[illegible] $, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0 ; +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0 ; +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty ; +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty ; +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty ; +\infty[$
$e^{rx}, r \in \mathbb{R}$	re^{rx}	$]-\infty ; +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(f+g)' = f' + g'.$ $\qquad (kf)' = kf', k \in \mathbb{R}.$

$(fg)' = f'g + fg'.$ $\qquad \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$; $\qquad (gof)' = (g'of)f'.$

$(e^u)' = e^u u'.$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, avec u à valeurs strictement positives.

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'.$

• D. Calcul intégral

Formules fondamentales

Si F est une primitive de f, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Si $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, alors $g'(x)=f(x)$.

$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt$.

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt+\int_b^c f(t)\,dt.$$

$$\int_b^a f(t)\,dt=-\int_a^b f(t)\,dt.$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))\,dt=\alpha\int_a^b f(t)\,dt+\beta\int_a^b g(t)\,dt.$$

Positivité

Si $a\le b$ et $f\le g$, alors $\int_a^b f(t)\,dt\le\int_a^b g(t)\,dt$.

Si $a\le b$ et $m\le f\le M$,

alors $m\,(b-a)\le\int_a^b f(t)\,dt\le M(b-a)$.

Valeur moyenne de f sur $[a\,;\,b]$: $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.

Intégration par parties

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,dt=[u(t)v(t)]_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)\,dt.$$

• E. Équations différentielles

Types d'équation	*Fonctions solutions*	*Intervalles*
$y'-ay=0$	$x\longmapsto ke^{ax}\,;\,k\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$y'=ay+b$	$x\longmapsto ke^{ax}-\dfrac{a}{b};\,k\in\mathbb{R}\,;\,a\neq 0$	$\mathbb{R}$
$y''=0$	$x\longmapsto ax+b\,;\,a\in\mathbb{R}\,;\,b\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$y''-\omega^2 y=0.\ (\omega\neq 0)$	$x\longmapsto Ae^{\omega x}+B\,e^{-\omega x}\,;\,A\in\mathbb{R}\,;\,B\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$y''+\omega^2 y=0.\ (\omega\neq 0)$	$x\longmapsto A\cos\omega x+B\sin\omega x\,;\,A\in\mathbb{R}\,;\,B\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

5 STATISTIQUE

- ***Moyenne***

$\overline{X}=\dfrac{\sum x_i}{N}$ ou $\overline{X}=\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ et

$\overline{Y}=\dfrac{\sum y_i}{N}$ ou et $\overline{Y}=\dfrac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}$,

n est l'effectif total.

- ***Variance***

$V(X)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{X}^2$ et

$V(Y)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\overline{Y}^2$.

- ***Covariance***

$Cov(X;Y)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{X}\overline{Y}$.

- ***Coefficient de corrélation linéaire***

$r=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$.

Si $|r|$ est proche de 1 , c'est-à-dire : $0{,}87\le r<1$ ou $-1<r\le -0{,}87$, alors on dit qu'il y a une bonne corrélation linéaire ou une forte corrélation linéaire entre les deux caractères X et Y.

- ***Droites de régression***

$y=ax+b$ où $a=\dfrac{Cov(X,Y)}{V(X)}$ et $b=\overline{Y}-a\overline{X}$ est appelée la droite de régression de Y en X.

$x=a'y+b'$ avec : $a'=\dfrac{Cov(X,Y)}{V(Y)}$ et $b'=\overline{X}-a'\overline{Y}$ est appelée la droite de régression de X en Y.

Achevé d'imprimer sous les presses de : JD Éditions
Pour le compte de JD Éditions.
Tél. : 25 23 00 17 50
Mise en page : JD Éditions
1re trimestre 2022
Dépôt légal N° 18430 du 08 mars 2022

Mon livre de MATHÉMATIQUES

Découvrez nos manuels
de la même collection

COVID-19 / MESURES DE PREVENTIONS

Lavez-vous les mains fréquemment

Respectez la distanciation physique

Portez un masque

Toussez ou éternuez dans votre coude

Ouvrez les fenêtres

Faites-vous vacciner

ISBN : 978-2-493344-23-6