

Activité:

1) Trouve une fonction F ayant pour dérivée sur I la fonction f donnée dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = 2x + 3x^2 - 7$ sur $I = \mathbb{R}$; b) $f(x) = x - 4x^3$ sur $I = \mathbb{R}$;

c) $f(x) = \cos x - 2 \sin x$ sur $I = [0; \pi[$;

d) $f(x) = -3 \sin x + 1 + \tan^2 x$ sur $I = \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$;

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} + \cos x$ sur $I =]0; 2\pi[$

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 1$.

Déterminer une fonction G ayant pour dérivée la fonction f .

3) a) Détermine deux autres fonctions H et K dérivables sur $\mathbb{R}$ ayant toutes les deux pour dérivées la fonction f .

b) Donne la forme générale des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ ayant pour dérivée la fonction f .

c) Détermine L , fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $L'(x) = f(x)$ et $L(1) = -1$.
Peux-tu trouver une autre expression de L autre que celle que tu viens d'obtenir ?

Primitives de fonctions élémentaires :

Fonction f	Primitives F de f	Sur l'intervalle
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c, c \in \mathbb{R}$	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$ $c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = x^r, r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c, c \in \mathbb{R}$	$[0; +\infty[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c, c \in \mathbb{R}$	$\left] (2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2} \right[$ $k \in \mathbb{Z}$

Exercice d'application :

1) Déterminer les primitives F de f sur l'intervalles K indiqué dans chacun des cas :

a) $f(x) = 3x^2 - x + 7$ $K = \mathbb{R}$; **b)** $f(x) = \cos x - 5 \sin x$ $K = [0; 2\pi]$; **c)** $f(x) = \sin \frac{x}{2} - 5 \cos 4x$

$K = [0; 2\pi]$; **d)** $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 1$ $K =]0; +\infty[$

2) On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \cos x - x \sin x$ et $g(x) = x \cos x$

a) Justifier que f admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer la dérivée de g sur $\mathbb{R}$. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui la valeur 1 en $-\frac{\pi}{3}$

Exercice d'application :

1) Déterminer les primitives F de f sur l'intervalles K indiqué dans chacun des cas :

a) $f(x) = 3x^2 - x + 7$ $K = \mathbb{R}$; **b)** $f(x) = \cos x - 5 \sin x$ $K = [0; 2\pi]$; **c)** $f(x) = \sin \frac{x}{2} - 5 \cos 4x$

$K = [0; 2\pi]$; **d)** $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 1$ $K =]0; +\infty[$

2) On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \cos x - x \sin x$ et $g(x) = x \cos x$

a) Justifier que f admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer la dérivée de g sur $\mathbb{R}$. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui la valeur 1 en $-\frac{\pi}{3}$

Activité1:

- 1) a) Dériver sur $[0; +\infty[$ la fonction $t \mapsto -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$.
b) Déduire une primitive sur $[0; +\infty[$ de la fonction $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$.
- 2) Après l'exploitation graphique, ces élèves ont obtenu $v_m = 5$; $\omega = \frac{\pi}{10}$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Déduire de la question 1 b) l'expression de $x(t)$.

- 3) Calculer alors la position du mobile à l'instant $t=9$ secondes.

Activité2 :

- 4) Linéariser $\sin^3 x$ et $\cos^4 x$.
- 5) Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes : $\sin 3x$, $\sin x$, $\cos 4x$, $\cos 2x$.
- 6) Déduire une primitive de chacune des fonctions $\sin^3 x$ et $\cos^4 x$.
- 7) Décrire alors une méthode pour déterminer une primitive des fonctions $\cos^n x$ et $\sin^n x$.

Résumé :

Soit u une fonction et $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$.

Sur tout intervalle I où u est dérivable et positive, une primitive de toute fonction de la forme

$a \times u' u^r$ est donnée par la fonction $a \times \frac{u^{r+1}}{r+1}$.

Si $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$, u doit être simplement dérivable sur I .

Si $r < 0$, u doit être dérivable et strictement positive sur I .

Conséquence:

- Si $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\frac{u'}{u^n} = u' u^{-n}$ et une primitive de la fonction $\frac{u'}{u^n}$ sur tout intervalle où u est dérivable et non nulle est la fonction $\frac{u^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$.
- Une primitive de la fonction $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ sur tout intervalle où u est dérivable et strictement positive est la fonction $\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{u}$.

Propriété : Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I . La fonction f définie sur I par $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ admet des primitives sur I et ces primitives F sont définies par $F(x) = e^{u(x)} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Exemple :

On définit les fonctions f et g par $f(x) = e^{4x+5}$ et $g(x) = (x+5)e^{x^2+10x}$, leurs primitives F et G sont définies par : $F(x) = \frac{1}{4}e^{4x+5} + k$ et $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2+10x} + k$. $k \in \mathbb{R}$

EXERCICE D'APPLICATION

1) Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies par :

$$f(x) = e^{2x} \ln x \quad ; \quad g(x) = \ln(e^x - 2) \quad ; \quad h(x) = \frac{3e^{2x}-1}{5e^x+4} \quad ; \quad j(x) = e^{\frac{x-1}{x^2-1}}.$$

2) Calculer une primitive de chacune des fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1}{x} e^{\ln|x|} \quad ; \quad g(x) = \frac{e^x}{3e^x+2} \quad ; \quad h(x) = xe^{x^2-2} + 3x^2.$$

3) Soit les fonctions q et w définies par $q(x) = (3x+5)e^x$ et $w(x) = (ax^2 + bx+c)e^x$ où a, b et c sont des nombres réels. Déterminer a, b et c pour que w soit une primitive de q .

Propriété :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle I soient a, b et c trois éléments de I . On suppose que u et v admettent des primitives sur I . Soient k un réel quelconque :

$\mathcal{P}_1$. Linéarité

- $\int_a^b (u + v)(x) dx = \int_a^b (u(x) + v(x)) dx = \int_a^b u(x) dx + \int_a^b v(x) dx$
- $\int_a^b (u - v)(x) dx = \int_a^b (u(x) - v(x)) dx = \int_a^b u(x) dx - \int_a^b v(x) dx$
- $\int_a^b (ku)(x) dx = \int_a^b ku(x) dx = k \int_a^b u(x) dx$

$\mathcal{P}_2$. Relation de CHASLES

$$\int_a^c u(x) dx + \int_c^b u(x) dx = \int_a^b u(x) dx$$

$\mathcal{P}_3$. Positivité

- Si $u(x) \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b u(x) dx \geq 0$
- Si $u(x) \leq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b u(x) dx \leq 0$

$\mathcal{P}_4$. Conservation de l'ordre

Si $u(x) \leq v(x)$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b u(x) dx \leq \int_a^b v(x) dx$

$\mathcal{P}_5$. Permutation des bornes

$$\int_a^b u(x) dx = - \int_b^a u(x) dx$$

$\mathcal{P}_6$. Stabilité des bornes

$$\int_a^a u(x) dx = 0$$

Exercices d'application

1. Calculer les intégrales suivantes :

a. $I = \int_{-2}^4 (t^2 - 4t + 3) dt$;

b. $J = \int_{-2}^4 (t^2 - 4t + 3) dt$.

2. Après avoir montré que pour tout réel x on a : $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$; calculer $K = \int_{-1}^2 \frac{1}{1+e^t} dt$;

Résumé

$\mathcal{P}_1$. Intégration par parties

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$ et soient u et v deux fonctions définies et continues sur $[a, b]$. On a :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

$\mathcal{P}_2$. Si u est une fonction paire alors : $\forall a \in \mathbb{R} \int_{-a}^a u(x)dx = 2 \int_0^a u(x)dx$.

$\mathcal{P}_3$. Si u est une fonction impaire alors : $\forall a \in \mathbb{R} \int_{-a}^a u(x)dx = 0$.

$\mathcal{P}_4$. Si u est une fonction périodique de période p alors :

$$\checkmark \quad \forall a \in \mathbb{R} \int_a^{a+p} u(x)dx = \int_0^p u(x)dx$$

$$\checkmark \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \int_{a+p}^{b+p} u(x)dx = \int_a^b u(x)dx.$$

1. Utiliser l'intégration par parties pour calculer :

$$\text{a. } I = \int_0^\pi (t-1) \cos t \, dt ; \quad \text{b. } J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} t^2 \sin t \, dt .$$

2. Sans calculer démontrer que :

$$\text{a. } \int_{-\pi}^\pi (t^2 - 1) \cos t \, dt = 2 \int_0^\pi (t^2 - 1) \cos t \, dt ;$$

$$\text{b. } \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} t^3 \sin t \, dt = 0 .$$

3. Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^n \sin(2t) \, dt$, prouver que :

$$0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} \text{ et en déduire } \lim_{n \rightarrow \infty} I_n.$$

4. Compléter les exercices par ceux du livre.